2 BAT 7/03/16

① $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+b, & x<0 \\ e^{-x}+1, & x\geq 0 \end{cases}$

a) $f(0) = e^{-0}+1 = e^0+1 = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(e^{-x}+1) = 1+1 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x+b) = 0+0+b = b$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ contínua en } x=0 \Leftrightarrow b=2}$

$\forall x<0$ és contínua perquè els polinomis són funcions contínues

$\forall x>0$ " perquè $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ és fracció de contínues i $e^x \neq 0, \forall x$ i en sumar-li 1 segueix sent contínua. (suma de contínues és contínua)

b) $\forall x>0 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x}$ i en ser $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$ llavors, $f'(x) = -\frac{1}{e^x} < 0$.

Per tant, f és decreixent $\forall x>0$.

② $f(x) = -x^3+3x+2$

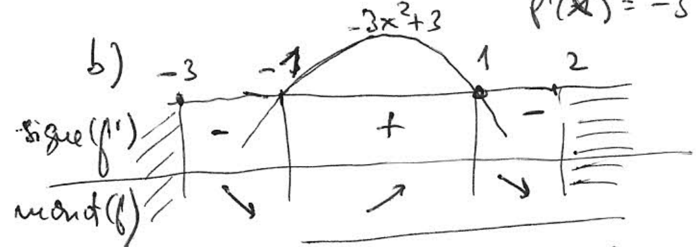
a) $y - f(-1) = f'(-1)(x-(-1))$

$f(-1) = -(-1)^3+3(-1)+2 = 1-3+2 = 0$

$f'(x) = -3x^2+3 \Rightarrow f'(-1) = -3+3 = 0$

$\Rightarrow y-0 = 0\cdot(x+1) \Rightarrow \boxed{y=0}$

b)



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2+3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Candidats a màxim absolut són $x=-3$ i $x=1$ (per continuïtat)

Cerquem els valors $\begin{cases} f(-3) = -(-3)^3+3(-3)+2 = 27-9+2 = 20 \\ f(1) = -1^3+3\cdot 1+2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El màxim absolut s'assoleix en $x=-3$ i el seu valor és $f(-3)=20$

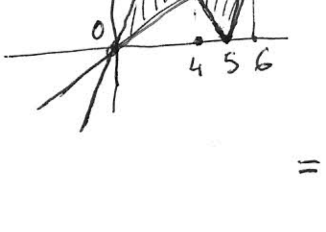
③ $g(x) = x^3-10x^2+25x = x(x^2-10x+25) = x(x-5)^2$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

$f(x) = x \longrightarrow$ recta de pendent 1

Intersecció de gràfics: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x^3-10x^2+25x \Leftrightarrow x^3-10x^2+24x = 0$

$\Leftrightarrow x(x^2-10x+24) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=6 \end{cases}$

Esquema gràfic:



$\Rightarrow \text{Àrea} = \int_0^4 [(x^3-10x^2+25x)-x]\,dx + \int_4^6 [x-(x^3-10x^2+25x)]\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{10x^3}{3} + 12x^2\right]_0^4 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{10x^3}{3} - 12x^2\right]_4^6 =$

$= \left(64 - \frac{640}{3} + 192\right) + \left[\left(-324+720-432\right) - \left(-64+\frac{640}{3}-192\right)\right]$

$= \frac{192-640+576}{3} + 720-756+256 - \frac{640}{3} = \frac{-512}{3} + 220 = \boxed{\frac{148}{3} \simeq 49{,}33}$

(4) $f(x)=\frac{x-4}{(3-2x)^3} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(3-2x)^{\cancel{3}}-(x-4)3\cancel{(3-2x)^2}(-2)}{(3-2x)^{\cancel{6}4}} = \frac{3-2x+6x-24}{(3-2x)^4} = \frac{4x-21}{\boxed{(3-2x)^4}}$

sempre positiu

	$(-\infty,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\frac{21}{4})$	$\frac{21}{4}$	$(\frac{21}{4},+\infty)$
Signe de f'	$\frac{-}{+}$ ⊖		$\frac{-}{+}$ ⊖		$\frac{+}{+}$ ⊕
monot de f	↘		↘	mín local	↗

Monòtona decreixent: $(-\infty,\frac{3}{2})\cup(\frac{3}{2},\frac{21}{4})$
Monòtona creixent: $(\frac{21}{4},+\infty)$
Mínim local: $(\frac{21}{4},\frac{-2}{675})$

(5) $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{9x+10\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{4x+3} = \frac{9}{4}+\lim_{x\to+\infty}\frac{10\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{4x+3} = \frac{9}{4}+\frac{\infty}{\infty}$

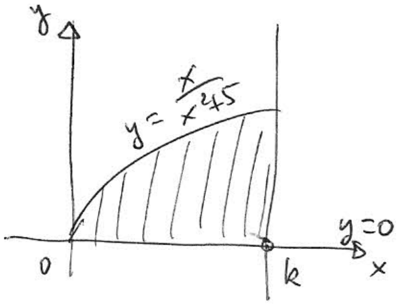
Apliquem la regla de l'Hôpital

$\lim_{x\to+\infty}\frac{10\ln\left(\frac{x}{3}\right)}{4x+3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x/3}}{4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{30}{12x} = \frac{30}{+\infty}=0$

Per tant, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{9}{4}+0=\frac{9}{4}=2{,}25$

S'estabilitzarà en al voltant de 2250 € diaris de facturació

(6)



$\int_0^k \frac{x}{x^2+5}\,dx=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^k\frac{2x}{x^2+5}\,dx=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^k\frac{2x}{x^2+5}\,dx=1 \Rightarrow \ln(k^2+5)-\ln 5=1$

$\cancel{\Rightarrow (x^2+5)=e \Rightarrow x^2=e-5 \Rightarrow x=\sqrt{e-5}}$

$\ln(k^2+5)=1+\ln 5 \Rightarrow k^2+5=e^{1+\ln 5}$

$\Rightarrow k^2=e\cdot e^{\ln 5}-5=5e-5=5(e-1) \Rightarrow \boxed{k=\sqrt{5(e-1)}\simeq 2{,}931}$