2 BAT - 26/4/16

(1)

$$\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & K \\ 1 & 7 & -5 \\ K & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix} 5 \\ -31 \\ 4 \end{matrix}}_{A|B}$$

$\det A = 14 - 15K - 4K - 7K^2 - 20 - 6 = -7K^2 - 19K - 12$

$\det A = 0 \iff K = \dfrac{19 \pm \sqrt{361-336}}{-14} = \dfrac{19 \pm 5}{-14} = \begin{cases} -\frac{12}{7} \\ -1 \end{cases}$

$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4 \Rightarrow r(A) \geq 2$

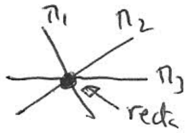
Discussió: $\boxed{K \neq -1 \text{ i } K = -\frac{12}{7}} \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(A|B) = 3$

$\boxed{K=-1} \Rightarrow M \neq 0,\ \det A = 0$ i $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -31 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 28 + 93 + 20 + 35 - 12 - 124 = 0$
$\Rightarrow r(A|B) = 2 = r(A)$

$\boxed{K = -\frac{12}{7}} \Rightarrow M \neq 0,\ \det A = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -31 \\ -\frac{12}{7} & -4 & 4 \end{vmatrix} = 28 + \frac{1116}{7} - 20 + 60 - 12 - 124 = \frac{640}{7} \neq 0$
$\Rightarrow r(A|B) = 3$ i $r(A) = 2$

Per tant:
(1) $K \neq -1$ i $K \neq -\frac{12}{7}$ $\iff$ sist. compatible determinat
(2) $K = -1$ $\iff$ " " indeterminat (1 paràmetre)
(3) $K = -\frac{12}{7}$ $\iff$ " incompatible

(1) Els tres plans incideixen en un únic punt.
(2) Els tres plans incideixen en una recta (recta comuna)
(3) Els tres plans es tallen de dos en dos, però no ~~co~~ comparteixen cap punt els tres.



(2)

$A = A^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \Rightarrow Id = A \cdot A^{-1} = A \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 = 1,\ b^2 = 1$ i $c^2 = 1$

- $a=1$
  - $b=1$: $c=1$, $c=-1$
  - $b=-1$: $c=1$, $c=-1$
- $a=-1$
  - $c=1$: $b=1$, $b=-1$
  - $c=-1$: $b=1$, $b=-1$

Fem recompte:
Nombre de matrius $= \boxed{2^3 = 8}$

(3)

A punt ~~pla~~ punt no pertany a cap dels dos plans que determinen la recta.
Per tant, serà del tipus $(x+y+2z-5) + \alpha(x-3y+z-7) = 0$
i s'ha de complir
$$1 + 0 + 2 - 5 + \alpha(1 - 0 + 1 - 7) = 0$$
$$-2 + \alpha(-5) = 0$$
$$\alpha = -2/5$$

Llavors, el pla que busquem és:

$5(x+y+2z-5) - 2(x-3y+z-7) = 0 \iff \boxed{3x + 11y + 8z - 11 = 0}$