Institut Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2n DE BAT
Inicial

15/10/15
$10 + 10 + 10 + 10 + 15 = 55$ punts

NOM:

Enunciat 1. Donada la funció $f(x) = \sqrt{\underbrace{4x^4 - 29x^2 + 25}_{p(x)}}$, trobeu el seu domini.

$\mathrm{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4x^4 - 29x^2 + 25 \geq 0\}$

Arrels de $p(x)$: $x^2 = \dfrac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{8}$: $25/4 \to x = \pm\frac{5}{2}$; $1 \to x = \pm 1$

Signe de $4\left(x^2 - \frac{25}{4}\right)(x^2 - 1)$:

		$5/2$		-1		1		$5/2$	
$x^2 - \frac{25}{4}$	$+$		$-$		$-$		$-$		$+$
$x^2 - 1$	$+$		$+$		$-$		$+$		$+$
$p(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

$\mathrm{Dom}\, f = \left(-8, -\frac{5}{2}\right] \cup [-1, 1] \cup [5/2, +\infty)$

Enunciat 2. Comproveu per als valors $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, que la igualtat següent és certa, i demostreu per inducció que ho és $\forall n \geq 1$.

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdot + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

$n = 1$: $1 \cdot 2 = 2$
$(1-1)\, 2^2 + 2 = 0 + 2 = 2$

$n = 2$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 = 2 + 8 = 10$
$(2-1) \cdot 2^3 + 2 = 8 + 2 = 10$

$n = 3$: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 = 10 + 24 = 34$
$(3-1) \cdot 2^4 + 2 = 2 \cdot 2^4 + 2 = 32 + 2 = 34$

$n = 4$: $1 \cdot 2 + \dots + 4 \cdot 2^4 = 34 + 64 = 98$
$(4-1) \cdot 2^5 + 2 = 3 \cdot 32 + 2 = 96 + 2 = 98$

- Hem vist que la igualtat és certa per a $n = 1$
- Suposem que és certa per $n = k$ i la demostrarem per $n = k+1$. És a dir cal que demostrem $1 \cdot 2 + \dots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} = (k+1-1)\, 2^{k+1+1} + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2$

Efectivament,

$\underbrace{1 \cdot 2 + \dots + k \cdot 2^k} + (k+1)\, 2^{k+1} = \underbrace{(k-1) \cdot 2^{k+1} + 2} + (k+1)\, 2^{k+1} = k \cdot 2^{k+1} - \cancel{2^{k+1}} + k\, 2^{k+1} + \cancel{2^{k+1}} + 2$

$= 2k \cdot 2^{k+1} + 2 = k \cdot 2 \cdot 2^{k+1} + 2 = \underline{\underline{k \cdot 2^{k+2} + 2}}$ (q.e.d)

Enunciat 3. Resoleu: a) $2\log x - \log(x+3) = \log 4$. b) $e^{2x} - 7e^x \geq -10$.

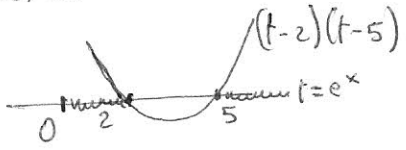
a) $\log \frac{x^2}{x+3} = \log 4 \Rightarrow \frac{x^2}{x+3} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{1} = \begin{cases} 6 \\ \cancel{-2} \end{cases}$

$x = 6$ és solució perquè $\log 36 - \log 9 = \log \frac{36}{9} = \log 4$

$x = -2$ no és solució perquè $\log(-2)$ no existeix

b) $e^{2x} - 7e^x + 10 \geq 0 \iff \begin{cases} (e^x - 2)(e^x - 5) \geq 0 \\ e^x > 0 \end{cases}$

$t = e^x \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 7t + 10 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $(t-2)(t-5)$



Del gràfic obtenim $0 < e^x \leq 2$ o $e^x \geq 5$

Això equival a $\to$ $x \leq \ln 2$ o $x \geq \ln 5$

és a dir $\to$ $\boxed{x \in (-\infty, \ln 2] \cup [\ln 5, +\infty)}$

Enunciat 4. Presenteu i demostreu la fórmula que troba la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $r \in (-1, 1)$. Apliqueu-la al càlcul de la suma,

$$3 - \frac{9}{5} + \frac{27}{25} - \frac{81}{125} + \frac{243}{625} - \cdots$$

Per a una progressió geomètrica de raó r i primer terme a_1

$$S_n = a_1 + a_1 r + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

$$r S_n = \quad a_1 r + \quad + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

diferència $S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

Si $r \in (-1,1)$ i $n \to \infty \Rightarrow \begin{cases} S_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{-a_1}{r-1} = \boxed{\frac{a_1}{1-r}} \\ \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \end{cases}$

La progressió de l'enunciat té $a_1 = 3$, $r = -\frac{3}{5} \in (-1, 1)$

Per tant, $\boxed{S_\infty = \frac{3}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{3}{\frac{8}{5}} = \frac{15}{8}}$

Enunciat 5. Resoleu: a) $\lim_{n\to\infty} n^{1-n}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^{n^2-n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^4+3n^3}}{6n+1}$

a) $\lim_{n\to\infty} n^{1-n} = \infty^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^{+\infty}} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3n^2+2}\right)^{n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-3n^2-2}\right)^{-3n^2-2}\right]^{\frac{n^2-n}{-3n^2-2}} =$

És del tipus $1^{+\infty}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{-3n^2-2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{-3-\frac{2}{n^2}}} = e^{\frac{1-0}{-3-0}} = \boxed{e^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}}$

en ser $\lim_{n\to\infty}(-3n^2-2) = -\infty$

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{n^4+3n^3}}{6n+1} = \underset{\text{Indef}}{\left(\dfrac{\infty-\infty}{\infty}\right)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{n^4-(n^4+3n^3)}{(6n+1)(n^2+\sqrt{n^4+3n^3})}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{-3n^3}{(6n+1)(n^2+\sqrt{n^4+3n^3})} = \underset{\text{Indet}}{\left(\dfrac{-\infty}{\infty}\right)} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{-3}{\frac{6n+1}{n}\cdot\left(\frac{n^2+\sqrt{n^4+3n^3}}{n^2}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty}\dfrac{-3}{\left(6+\frac{1}{n}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)} = \dfrac{-3}{(6+0)(1+\sqrt{1+0})} = \dfrac{-3}{6\cdot 2} = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$