Enunciat 1. Considereu el sistema $\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + az = a - 2 \\ x + ay + 4z = 1 \end{array}\right.$

a) Discutiu-lo segons el valor del paràmetre a.

b) Resoleu els casos compatibles.

Enunciat 2. Donada la matriu $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, estudieu si les files són linealment dependents i, en cas afirmatiu, trobeu-ne les relacions de dependència.

1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & a & a-2 \\ 1 & a & 4 & 1 \end{array}\right) \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & a-4 \\ 0 & a+1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & a \\ 1 & a & 4 \end{pmatrix}$

$A|B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & a & a-2 \\ 1 & a & 4 & 1 \end{pmatrix}$

a) $(*) \begin{cases} E_2 \longleftrightarrow -2E_1 + \boxed{1}^{\neq 0} E_2 \\ E_3 \longleftrightarrow -1E_1 + \boxed{1} E_2 \end{cases}$

$(**) \begin{cases} E_2 \longleftrightarrow E_3 \text{ (permuta)} \end{cases}$

$$\overset{(**)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & a-4 \end{array}\right)$$

- $a+1 \neq 0$ i $a-4 \neq 0 \Rightarrow \boxed{r(A) = 3 = r(A|B)}$ per ser A i $A|B$ matrius esglaonades de tres files independents.

- $a+1=0 \Rightarrow$ el sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A|B) = 3 \end{array}}$

perquè $\begin{cases} r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ en ser } E_3 = \frac{-5}{2} E_2 \\ r\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3 \end{cases}$

- $a-4=0 \Rightarrow$ el sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} r(A) = 2 \\ r(A|B) = 2 \end{array}}$

perquè A i $A|B$ són esglaonades de dues files independents.

Conclusió: Pel teorema de Rouché

$\boxed{a \neq -1 \text{ i } a \neq 4} \Leftrightarrow$ sistema compatible i, a més, determinat en ser $n = 3 = r(A) = r(A|B)$

$\boxed{a = -1} \Leftrightarrow$ sistema incompatible

$\boxed{a = 4} \Leftrightarrow$ sistema compatible i, a més, indeterminat en $r(A) = r(A|B) = 2 < 3 = n$, amb grau d'indeterminació igual a $3 - 2 = 1$.

b) Solució del cas compatible determinat ($a \neq -1$ i $a \neq 4$)

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ (a+1)y + 2z = 0 \\ (a-4)z = a-4 \end{cases} \Longrightarrow \quad \underline{\underline{z}} = \frac{a-4}{a-4} = \boxed{1}$$

$$\underline{\underline{y}} = \boxed{-\frac{2}{a+1}}$$

$$\underline{\underline{x}} = 1 + \left(-\frac{2}{a+1}\right) - 2 = -1 - \frac{2}{a+1} = \boxed{\frac{-a-3}{a+1}}$$

Solució del cas compatible indeterminat ($a=4$)

Considerem el paràmetre $z = \lambda$ perquè $(1,0)$ i $(-1,5)$ són columnes independents

$$\begin{cases} z = \lambda \\ x - y = 1 - 2\lambda \\ 5y = -2\lambda \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} y &= -\frac{2}{5}\lambda \\ x &= -\frac{2}{5}\lambda + 1 - 2\lambda = 1 - \frac{12}{5}\lambda \\ z &= \lambda \end{aligned}} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda\left(-\frac{12}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)}$$

2

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = \vec{0}$$

$$\lambda_1 (3, -1, -5) + \lambda_2 (-2, 1, 4) + \lambda_3 (1, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{aligned} \lambda_2 &= -4\lambda_3 \\ \lambda_1 &= +\frac{2(-4\lambda_3) - \lambda_3}{3} = -\frac{9}{3}\lambda_3 \end{aligned}$$

$$-3\lambda_3 F_1 - 4\lambda_3 F_2 + \lambda_3 F_3 = \vec{0} \Rightarrow \boxed{3F_1 + 4F_2 - F_3 = \vec{0}} \quad (*)$$

Els vectors són linealment dependents perquè λ_1, λ_2 i λ_3 poden ser diferent de zero i la relació de dependència és (*)