IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 2N BAT CCSS 13/II/2006
Funcions – Final $(0.5+0.5+0.5+1+1+0.5)+(3+1)+(1+1)$

1. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$.

a) Calculeu-ne la derivada amb les regles de càlcul de derivades.

b) Calculeu-ne la derivada mitjançant la definició de derivada.

c) Calculeu $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

d) Trobeu les equacions de les rectes tangents paral·leles a $2x+y+3=0$.

e) Representeu f i les tres rectes anteriors gràficament, amb l'ajut de la informació recollida i els talls amb els eixos de coordenades.

f) Trobeu la funció inversa f^{-1} de f i comproveu que $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$.

a) $f'(x)=\dfrac{1\cdot(x-2)-1\cdot x}{(x-2)^2}=\boxed{\dfrac{-2}{(x-2)^2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{x+h-2}-\dfrac{x}{x-2}}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)x-(x+h)2-x(x+h)+2x}{(x+h-2)(x-2)h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{(x+h-2)(x-2)h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{(x+h-2)(x-2)}=\frac{-2}{(x-2)(x-2)}=\boxed{\frac{-2}{(x-2)^2}}.
\end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{0^+}=\boxed{+\infty}$, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{2}{0^-}=\boxed{-\infty}$,
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{1-\frac{2}{x}}=\dfrac{1}{1-0}=\boxed{1}$.

d) El pendent de la recta $y=-2x-3$ és igual a -2. Per tant, el de la tangent paral·lela és també -2. Llavors, en el punt x de tangència s'ha de complir $f'(x)=-2$:

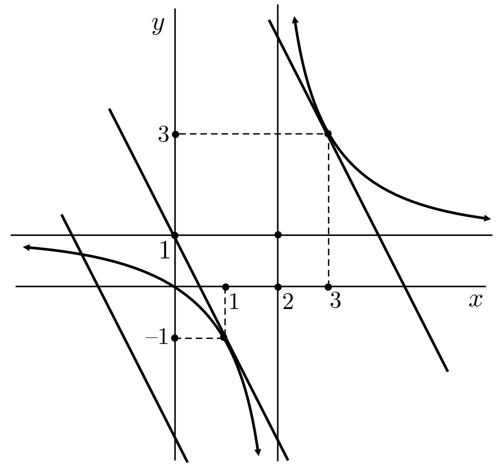
$$\frac{-2}{(x-2)^2}=-2\Longrightarrow (x-2)^2=1\Longrightarrow x-2=\pm 1\Longrightarrow x=3\quad\text{o}\quad x=1.$$

Per tant, les rectes tangents seran:

$$\left\{\begin{array}{l} y-f(3)=-2(x-3)\\ y-f(1)=-2(x-1)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} y-3=-2(x-3)\\ y+1=-2(x-1)\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\boxed{\begin{array}{l} y=-2x+9\\ y=-2x+1\end{array}}\right.$$

e)

	Tall OX	Tall OY
$y=f(x)$	$(0,0)$	
$y=-2x-3$	$\left(-\frac{3}{2}\,,\,0\right)$	$(0,-3)$
$y=-2x+9$	$\left(\frac{9}{2}\,,\,0\right)$	$(0,9)$
$y=-2x+1$	$\left(\frac{1}{2}\,,\,0\right)$	$(0,1)$



f) $f(x)=\dfrac{x}{x-2} \Longrightarrow x\cdot f(x)-x=2\cdot f(x) \Longrightarrow x=\dfrac{2f(x)}{f(x)-1} \Longrightarrow \boxed{f^{-1}(x)=\dfrac{2x}{x-1}}$.

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{2\,\dfrac{x}{x-2}}{\dfrac{x}{x-2}-1}=\frac{\dfrac{2x}{x-2}}{\dfrac{x-x+2}{x-2}}=\frac{2x}{2}=x\,.$$

2. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{6x}{x^2+3}$.

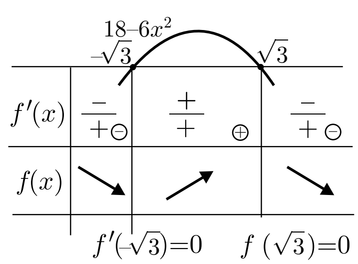
a) Trobeu-ne els extrems relatius, els punts d'inflexió i els intervals de monotonia i concavitat, a partir de l'estudi dels signes de les derivades primera i segona mitjançant gràfics de rectes i/o paràboles.

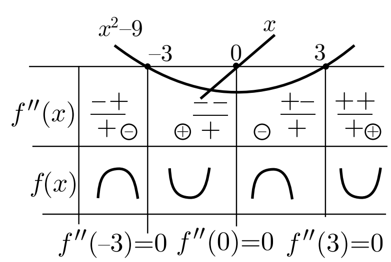
b) Calculeu la seva asímptota horitzontal mitjançant el càlcul de límits i utilitzeu la informació recollida i els talls amb els eixos per representar f gràficament.

a) $f'(x)=\dfrac{6(x^2+3)-2x\cdot 6x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{18-6x^2}{(x^2+3)^2}$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-12x(x^2+3)^2-2(x^2+3)2x(18-6x^2)}{(x^2+3)^4}=\frac{-12x(x^2+3)-4x(18-6x^2)}{(x^2+3)^3}\\
&= \frac{-12x^3-36x-72x+24x^3}{(x^2+3)^3}=\frac{12x^3-108x}{(x^2+3)^2}=\frac{12x(x^2-9)}{(x^2+3)^2}
\end{aligned}$$

Observem els esquemes següents i en resulta l'estudi demanat, (tenim en compte que $x^2+3>0$):





f decreix en $\big(-\infty,-\sqrt{3}\big)\cup(\sqrt{3},+\infty)$, f creix en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

f té un mínim local en $x=-\sqrt{3},\ f(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$

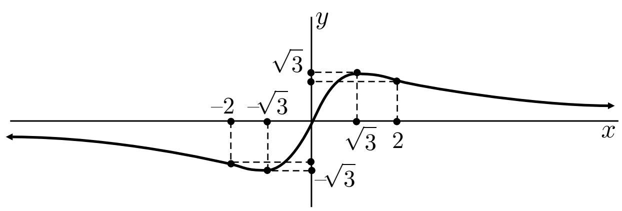
f té un màxim local en $x=\sqrt{3},\ f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$

f és còncava avall en $(-\infty,-3\cup(0,3)$, f és còncava amunt en $(-3,0)\cup(3,+\infty)$

f té punts d'inflexió en: $x=-3,\ f(-3)=-\dfrac{3}{2};\ x=0,\ f(0)=0;\ x=3,\ f(3)=\dfrac{3}{2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{x^2+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{6}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0\Longrightarrow\boxed{y=0}$ és asímptota horitzontal.

L'únic tall amb els eixos el tenim en $x=0,\ f(0)=0$.



3. Sigui al funció $f(x)=\dfrac{1}{4}\,x\cdot e^{3-2x}$.

a) Utilitzeu les regles del càlcul de derivades per provar que $f'(x)=\dfrac{1}{4}\,(1-2x)\cdot e^{3-2x}$.

b) S'ha comprovat que en un individu, després de la ingestió d'una beguda alcohòlica, la concentració d'alcohol en sang en grams per litre ve descrita per la funció $f(x)$ anterior, en què x és el temps en hores transcorregut des de l'instant de la ingestió. Estudieu el signe de la derivada de f i deduïu-ne el moment en què la concentració és màxima.

a) $f'(x)=\dfrac{1}{4}\,\big(1\cdot e^{3-2x}+x\cdot e^{3-2x}\cdot(-2)\big)=\dfrac{1}{4}\,e^{3-2x}(1-2x)$.

b) Recordem que $e^{3-2x}>0$. Llavors, de l'estudi del signe de la derivada presentat a l'esquema adjunt, s'obté un màxim absolut de la funció per a $x=\dfrac{1}{2}$. És a dir, que la concentració màxima s'obté $\boxed{\text{mitja hora després de la ingestió}}$.