① $f(x)=x^4-8x^2-9$

a) $f(x)=0 \Rightarrow x^2=z=\frac{8\pm\sqrt{64+36}}{2}=\frac{8\pm10}{2}=\begin{cases}9\\-1\end{cases} \Rightarrow z^2-8z-9=(z-9)(z+1)=(x^2-9)(x^2+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=(x+3)(x-3)(x^2+1)}$ i $\boxed{f(x)=0 \iff x=-3 \text{ o } x=3}$ ← Arrels

Descomposició factorial

b) pendent? → $24x+2y-15=0 \iff y=-12x+\frac{15}{2}$

tangent al gràfic $\iff$ en $x=a \iff f'(a)=-12 \iff 4a^3-16a=-12$

$\iff a^3-4a+3=0 \iff$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -4 & 3 \\ a=1 & & 1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1+12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ → a_1, a_2

Equació: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

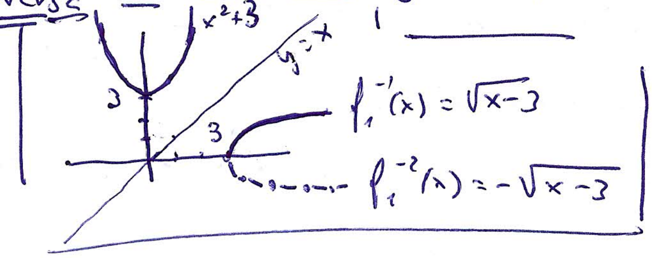
$y-(-16)=-12(x-1) \iff \boxed{y=-12x-4}$

Hi ha dues tangents més que es trobarien igual $y-f(a_1)=-12(x-a_1)$

$y-f(a_2)=-12(x-a_2)$

② $y=x^2+3 \xrightarrow{\text{inversa}} x=(y^{-1})^2+3 \Rightarrow y^{-1}=\pm\sqrt{x-3}$ → $f_1^{-1}(x)=\sqrt{x-3}$ i $f_2^{-1}(x)=-\sqrt{x-3}$

Gràfic



Els gràfics de les inverses s'obtenen practicant una simetria respecte la recta $y=x$ de la funció inicial.

③ $f(x)=10x-e^{3x} \Rightarrow f'(x)=10-3e^{3x}$

- $10-3e^{3x}>0 \iff 10>3e^{3x} \iff \frac{10}{3}>e^{3x} \iff \ln\left(\frac{10}{3}\right)>3x \iff$

$\iff \frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{3}\right)>x \iff f$ és monòtona creixent en $\left(-\infty,\frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{3}\right)\right)$

- $10-3e^{3x}<0 \iff 10<3e^{3x} \iff \dots \iff \frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{3}\right)<x \iff$

$\iff f$ és monòtona decreixent en $\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{3}\right),+\infty\right)$ $\boxed{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{10}{3}\right)\simeq 0{,}401}$

④ $\lim_{x\to0^+} x\cdot\ln x = 0^+\cdot(-\infty)=$ Indeterminat $=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}=$ indeterm.

Aplicarem la regla de l'Hôpital

$=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}(-x)=0 \Rightarrow$ $x=0$ No és asímptota vertical perquè el límit hauria de ser $\pm\infty$

⑤ Possibles punts de discontinuïtat: $x=-1$, $x=0$, $x=2$

$x=-1$ És discontínua perquè no existeix $f(-1)$

Tipus: $\lim_{x\to-1^+}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{0^+}=+\infty$ i $\lim_{x\to-1^-}\frac{3}{x+1}=\frac{3}{0^-}=-\infty \Rightarrow$

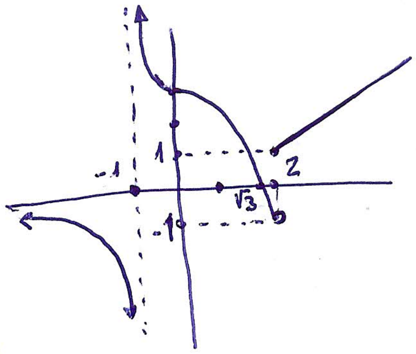
$\Rightarrow$ discont. asimptòtica en $x=-1$

$x=0$ $f(0)=3-0^2=3$, $\lim_{x\to0^+}f(x)=3-0^2=3$, $\lim_{x\to0^-}f(x)=\frac{3}{0+1}=3 \Rightarrow$ contínua en $x=0$

$x=2$ $f(2)=2-1=1$, $\lim_{x\to2^+}f(x)=2-1=1$, $\lim_{x\to2^-}f(x)=3-2^2=-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Discont. de salt finit en $x=2$

Gràfic



⑥ $m(t) = \dfrac{50t}{t+1}$ a) $m(0) = \boxed{0}$
$m(9) = \dfrac{450}{10} = \boxed{45}$

b) $m'(t) = \dfrac{50(t+1) - 50t}{(t+1)^2} = \dfrac{50}{(t+1)^2} > 0,\ \forall t \Rightarrow$ m(t) és monòtona creixent, $\forall t > 0$.

c) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{50t}{t+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{50}{1 + \frac{1}{t}} = \dfrac{50}{1+0} = 50$ individus

⑦

$x \cdot y = 250$
$L(x,y) = 2x + y$ $\Rightarrow \boxed{L(x) = 2x + \dfrac{250}{x} = \dfrac{2x^2 + 250}{x}}$
$0 < x$

$L'(x) = 2 - \dfrac{250}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 250}{x^2}$
$L'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{125}$

	$-\sqrt{125}$	0		$\sqrt{125}$	
s(L')			−		+
m(L)			↘		↗

Mínim absolut en $x = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

$L(\sqrt{125}) = \dfrac{2 \cdot 125 + 250}{5\sqrt{5}} = \dfrac{500}{5\sqrt{5}} = \dfrac{100}{\sqrt{5}} = 20\sqrt{5}$ m

Solució

⑧ a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{ax+1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4x(ax+1) - a \cdot 2x^2}{(ax+1)^2} = \dfrac{+2ax^2 + 4x}{(ax+1)^2}$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -2}$

		0		1	
s(f')	−		+		−
m(f)	↘		↗		↘

en $x = 1$ hi ha màxim

b) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}^{\pm}} \dfrac{2x^2}{3x+1} = \dfrac{+\frac{2}{9}}{0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow$ Asímptota vertical $x = -\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{3x+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2}{\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{2}{0+0} = \pm\infty \Rightarrow$ No hi ha As. Hor.

⑨ $f(x) = \dfrac{x}{(3x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1(3x-2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(3x-2)} \cdot 3x}{(3x-2)^{\cancel{4}3}} = \dfrac{-3x-2}{(3x-2)^3}$

$f''(x) = \dfrac{-3(3x-2)^{\cancel{3}} - (-3x-2)\,3\,\cancel{(3x-2)^2} \cdot 3}{(3x-2)^{\cancel{6}4}} = \dfrac{-9x+6+27x+18}{(3x-2)^4}$

$= \dfrac{+18x+24}{(3x-2)^4}$

Candidats $\begin{cases} \text{Extrems: } x = -\dfrac{2}{3} \\ \text{Inflexió: } x = \dfrac{24}{18} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$