Institut Pons d'Icart | 17/03/16
Matemàtiques – 2n de BAT CS | $60 + 20 = 80$ punts
Àlgebra I

Enunciat 1. Considereu el sistema $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x-y+(a-5)z=1 \\ 3x+ay-az=0 \end{cases}$

a) Discutiu-lo segons els valors del paràmetre a.

b) Resoleu els casos compatibles.

Enunciat 2. Donada la matriu $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, estudieu si les files són linealment dependents i, en cas afirmatiu, trobeu-ne les relacions de dependència.

1

$n = 3 =$ nombre d'incògnites

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & a-5 \\ 3 & a & -a \end{pmatrix}$ $\quad A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & a-5 & 1 \\ 3 & a & -a & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & a-5 & 1 \\ 3 & a & -a & 0 \end{array}\right) \underset{(*)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & a-11 & 3 \\ 0 & a-6 & -a-9 & 3 \end{array}\right) \underset{(**)}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & a-11 & 3 \\ 0 & 0 & -a^2+22a-21 & -3a+3 \end{array}\right)$$

a) $(*)$ $E_2 \longleftrightarrow -2E_1+1E_2$
$E_3 \longleftrightarrow -3E_1+1E_2$

$(**)$ $E_3 \longleftrightarrow -(a-6)E_2-5E_3$

- $\boxed{-a^2+22a-21 \neq 0} \Longrightarrow \boxed{r(A) = 3 = r(A|B)}$ per ser A i $A|B$ matrius esglaonades amb tres files independents

- $-a^2+22a-21=0 \Longleftrightarrow a = \dfrac{-11 \pm \sqrt{121-21}}{-1} = \begin{cases} 1 \\ 21 \end{cases}$

$\boxed{a=1}$ el sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 3 \end{array}\right)$

i $\boxed{r(A) = 2 = r(A|B)}$ per ser A i $A|B$ matrius esglaonades de tres files independents

$\boxed{a=21}$ el sistema és equivalent a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -60 \end{array}\right)$

i $\boxed{r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)}$ en ser les matrius del sistema resultant $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ i $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -60 \end{array}\right)$, les quals tenen dues i tres files independents respectivament.

Conclusió: Pel teorema de Rouché

$\boxed{a \neq 1 \text{ i } a \neq 21} \Longleftrightarrow$ sistema compatible i, a més, determinat en ser $n = 3 = r(A) = r(A|B)$

$\boxed{a=1} \Longleftrightarrow$ sistema compatible indeterminat en ser $n = 2 = r(A) = r(B)$, amb grau d'indeterminació $n - r = 3 - 2 = 1$.

$\boxed{a=21} \Longleftrightarrow$ sistema incompatible en ser $r(A) = 2 \neq 3 = r(A|B)$

b) Solució del cas compatible determinat ($a \neq 1$ i $a \neq 21$)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = -1 \\ -5y + (a-11)z = 3 \\ (-a^2+22a-21)z = -3a+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\underline{z}} = \frac{-3(a-1)}{-(a-1)(a-21)} = \boxed{\frac{3}{a-21}}$$

$$\underline{\underline{y}} = -\frac{1}{5}\left(3-(a-11)\frac{3}{a-21}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{3a-63-3a+33}{a-21}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{-30}{a-21}\right) = \boxed{\frac{6}{a-21}}$$

$$\underline{\underline{x}} = -1-2\cdot\frac{6}{a-21}-3\cdot\frac{3}{a-21} = \frac{-a+21-12-9}{a-21} = \boxed{\frac{-a}{(a-21)}}$$

Solució del cas compatible indeterminat ($a = 1$)

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = -1 \\ -5y + 10z = 3 \end{array}\right\}$$

Considerem el paràmetre $z = \lambda$ perquè $(1,0)$ i $(2,-5)$ són columnes independents

Llavors, $\left\{\begin{array}{r} x + 2y = -1-3\lambda \\ -5y = 3-10\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{3}{5}+2\lambda \\ x = -1-3\lambda-2\left(-\frac{3}{5}+2\lambda\right) = \\ \quad = -1-3\lambda+\frac{6}{5}-4\lambda = \frac{1}{5}-7\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

$$\boxed{x = \frac{1}{5}-7\lambda,\ y = -\frac{3}{5}+2\lambda,\ z = \lambda \ \Big|\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

2. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = (0,0,0)$

$\lambda_1(-2,1,4) + \lambda_2(4,1,-2) + \lambda_3(3,3,3) = (0,0,0)$

$$\begin{array}{r} -2\lambda_1+4\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ 4\lambda_1-2\lambda_2+3\lambda_3=0 \end{array} \Leftarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & -12 & -18 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right)$$

$E_2 \leftrightarrow -E_1-2E_2$

$E_3 \leftrightarrow -4E_1-2E_2$

$E_3 = 2E_2$

paràmetre

$$\Rightarrow \begin{array}{r} -2\lambda_1+4\lambda_2 = -3\lambda_3 \\ -6\lambda_2 = +9\lambda_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_2 = -\frac{3}{2}\lambda_3 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(-3\lambda_3-4\left(-\frac{3}{2}\lambda_3\right)\right) = -\frac{3}{2}\lambda_3 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

És a dir que les λ_i no són necessàriament igual a zero i, per tant, les files són linealment dependents:

Relació de dependència:

$$-\frac{3}{2}\lambda_3 F_1 - \frac{3}{2}\lambda_3 F_2 + \lambda_3 F_3 = (0,0,0) \Rightarrow -3F_1 - 3F_2 + 2F_3 = (0,0,0)$$