2 BATCS - 26/4/16

(1) $\underbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & K \\ 1 & 7 & -5 \\ K & -4 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 5 \\ -31 \\ 4 \end{matrix} \right)}_{A|B}$

$\det A = 14-15K-4K-7K^2-20-6 = -7K^2-19K-12$

$\det A = 0 \Leftrightarrow K = \dfrac{19 \pm \sqrt{361-336}}{-14} = \begin{cases} \nearrow -\frac{12}{7} \\ \searrow -1 \end{cases}$

$M = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7-3 = 4 \neq 0$

- Només cal estudiar els casos en què $\det A = 0$, perquè si $\det A \neq 0$ el sistema compleix $r(A) = r(A|B) = 3$ (Comp. determinat)

$\boxed{K=-1}$ $M \neq 0$ i $\det A = 0$ i $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -31 \\ -1 & -4 & 4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = r(A|B) = 2$

En aquest cas el sistema es compatible indeterminat i és equivalent a $\left(\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -4 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 5 \\ -36 \end{matrix}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 5 \\ -9 \end{matrix}\right.\right)$

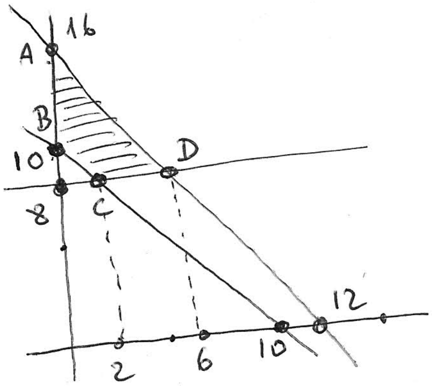
llavors, $\boxed{z = \lambda;\ y = -9+\lambda;\ x = 5-3(-9+\lambda)+\lambda = 32-2\lambda}$

$\boxed{K = -\frac{12}{7}}$ és incompatible perquè $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & -31 \\ -\frac{12}{7} & -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{640}{7} \neq 0$ i llavors $r(A) = 2$ i $r(A|B) = 3$.

(2) $A = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $a = 0$ i $b = \pm 1$ o $b = 0$ i $a = \pm 1$

Per tant hi ha quatre matrius $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3)



El recinte és tancat i, per tant, el màxim i el mínim es troben en algun vèrtex o en tots el valors d'algun segment de le frontera.

A: $B(0,16) = 0 - 4\cdot 16 = -64$
B: $B(0,10) = 0 - 4\cdot 10 = -40$
C: $B(2,8) = 2 - 4\cdot 8 = -30$
D: $B(6,8) = 6 - 4\cdot 8 = -26$

Màxim en $x = 6, y = 8$ de valor -26
Mínim en $x = 0, y = 16$ de valor -64