Matemàtiques 2n BAT CCSS - 30/11/15

1) $f(x)=\begin{cases} \frac{5}{x-1} & , x<2 \\ 9-x^2 & , x\geq 2 \end{cases}$

a) $f(1)=\frac{5}{1-1}=\frac{5}{0}$ no existeix

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0^+} = +\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{5}{x-1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Discontinuïtat asimptòtica en } x=1}$

$f(2)=9-2^2=5$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{5}{2-1} = 5$

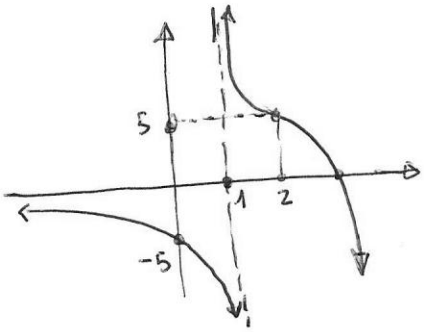
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 9-2^2 = 5$

$\boxed{f \text{ és contínua en } x=2}$

b) $y=\frac{5}{x-1}$ → $x=1$ A.V. ; → $y=0$ A.H ; → Tall OY: $(0,-5)$

$y=9-x^2$ → Talls OX: $(3,0)$ i $(-3,0)$

Màxim: $(0,9)$



2) $f(x)=x^2+2x$

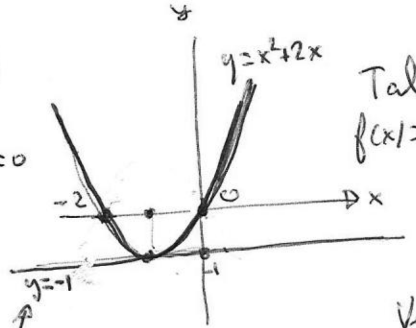
a) $f'(-1)=\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^2+2(-1+h)-(-1)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1+h^2-2h-2+2h+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$

$\Rightarrow \boxed{f'(-1)=0}$

b) Recta Tangent: $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$

$\Rightarrow y-(-1)=0(x+1) \Rightarrow \boxed{y=-1}$



Talls eixos

$f(x)=0 \Rightarrow x(x+2)=0$

$\Downarrow$

$x=0$

$x=-2$

$\boxed{(0,0) \text{ i } (-2,0)}$

Vèrtex: $(-1,-1)$

3) $f(x)=x^3+ax^2-8x-8$

Extrem local en $x=2$ $\Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+2ax-8=0 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12+4a-8=0 \Rightarrow 4a=8-12 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-4}{4}=-1}$

$3x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3} \to 2,\ -\frac{4}{3}$

		$-4/3$		2	
Signe(f')	+		−		+
Monot(f)	↗		↘		↗

$\Rightarrow$ $f'(2)=0$; f decreix abans de $x=2$; f creix després de $x=2$ $\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ té mínim local en } x=2}$

4) a) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^2+4x+4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2(x+1)}{(x+2)^2} = \lim_{x\to -2}(x+1) = \boxed{-1}$

	1	5	8	4
−2		−2	−6	−4
	1	3	2	0
−2		−2	−2	
	1	1	0	

b) $\lim_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{x-1}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 1}(1+1-x)^{\frac{1}{x-1}} =$

$= \lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{1-x}}\right)^{\frac{1}{1-x}}\right]^{(-1)}$ té límit ∞

$= e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$

c) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1-x} = 0^{-\infty} = \frac{1}{0^{+\infty}} = \frac{1}{0} = \boxed{+\infty}$

(5) a) $I(0) = 12000 \cdot e^{-0{,}2\cdot 0} = \boxed{12000 \text{ infectes}}$

b) $0{,}6 \cdot 12000 = I(t) = 12000 \cdot e^{-0{,}2t} \Rightarrow 0{,}6 = e^{-0{,}2t} \Rightarrow \ln(0{,}6) = -0{,}2t \cdot \underbrace{\ln e}_{1}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln(0{,}6)}{-0{,}2} \simeq \boxed{2{,}55 \text{ setmanes}}$

c) $1 = I(t) = 12000 \cdot e^{-0{,}2t} \Rightarrow \dfrac{1}{12000} = e^{-0{,}2t} \Rightarrow -\ln 12000 = -0{,}2t \cdot \underbrace{\ln e}_{1}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\ln 12000}{0{,}2} \simeq \boxed{46{,}96 \text{ setmanes}}$

(6) $f(x) = \dfrac{4+3x}{1+x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{3(1+x^2) - 2x(4+3x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{3+3x^2-8x-6x^2}{(1+x^2)^2} = \boxed{\dfrac{-3x^2-8x+3}{(1+x^2)^2}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x^2-8x+3 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16+9}}{-3} = \begin{cases} -3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

b)

$\to -3x^2-8x+3$

$(1+x^2)^2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

		-3		$1/3$	
Signe de f'	$\frac{-}{+}$ ⊖		$\frac{+}{+}$ ⊕		$\frac{-}{+}$ ⊖
Monotonia de f	↘		↗		↘

La funció f creix en $(-3, \frac{1}{3})$

f decreix en $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

f té màxim local en $\boxed{x = \frac{1}{3}}$ i el seu valor és $f(\frac{1}{3}) = \dfrac{5}{\frac{10}{9}} = \boxed{\dfrac{9}{2}}$

f té mínim local en $x = -3$ i " és $f(-3) = \dfrac{-5}{10} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$