

NOM:

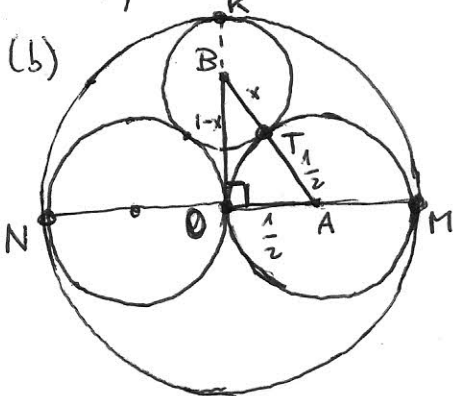
**Enunciat 1.** Feu una breu presentació del problema del sangaku de Sekijuisi. Concretament, es demana:

- La descripció del problema.
- Les idees principals de l'anàlisi.
- El desenvolupament algebraic que va portar a la solució del problema.

(a) El sangaku presenta el disseny de quatre circumferències.

- Una exterior que conté les altres tres.
- Dues interiors tangents a la primera i tangents entre si, d'igual radi i amb els seus centres situats sobre el mateix diàmetre de la primera.
- Una última circumferència interior i tangent a la primera i a les altres dues.

En fer la construcció de les tres primeres circumferències de poca complexitat, el problema coincideix en el tractat de l'última.

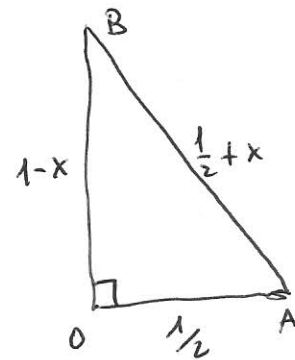


- Acompanyem l'anàlisi d'una representació gràfica de la descripció de l'apartat (a).
- Observem que: El centre B, de la circumferència quarta ha d'estar sobre la mediana del diàmetre MN.
- Els centres A i B estan alineats amb el punt T de tangència per la propietat de les circumferències tangents. I llavors AOB és un triangle rectangle

tal que la seva hipotenusa conté el punt T.

- Si considerem OM la unitat de mesura i  $x = BT$  el radi desconegut de la quarta circumferència, tenim els elements del triangle que es presenten a la figura adjunta.

Si li apliquem el teorema de Pitàgores en resulta:  $(\frac{1}{2} + x)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-x)^2$  i l'anàlisi s'ha acabat.



(c) Desenvolupament algebraic per obtenir x i la construcció del quart cercle.

$$\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + x^2 = \frac{1}{4} + 1 - 2 \cdot 1 \cdot x + x^2 \Leftrightarrow x + x^2 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Solució del problema: Per construir la quarta circumferència només cal determinar un punt sobre OK que el parteixi en tres parts iguals de manera que  $OB = 2 \cdot BK$ . Això s'aconsegueix amb l'aplicació del teorema de Tales.

Enunciat 2. Considereu el sistema d'equacions  $\begin{cases} 3x + 9y = -9 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$  Trobeu la seva solució algebri-  
cament. Trobeu tres solucions de cada equació, representeu les rectes que determinen i  
expliqueu el significat del punt on es tallen.

$$\begin{cases} E_1: 3x + 9y = -9 \\ E_2: 2x + y = 4 \end{cases} \text{ equival a}$$

$$\begin{cases} E_1: 3x + 9y = -9 \\ 9E_2: 18x + 9y = 36 \end{cases}$$

$$E_1 - 9E_2: -15x = -45$$

$$x = \frac{-45}{-15} = 3$$

$$E_2 \rightarrow y = 4 - 2x = 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

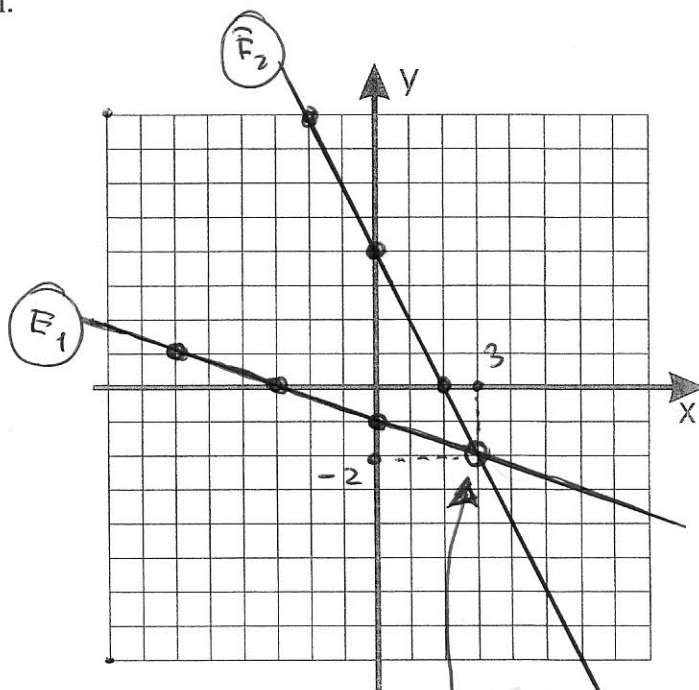
Solució:  $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

Ⓕ<sub>1</sub> Tres solucions

x	y = $\frac{-9-3x}{9}$
0	-1
-3	0
-6	1

Ⓕ<sub>2</sub> Tres solucions

x	y = 4 - 2x
0	4
2	0
-2	8



Es tallen en el  
punt (3, -2).

Això significa que  
x i y han de satisfer  
les dues equacions i,  
per tant, x=3, y=-2 és  
la solució del sistema i  
hem vist a la resolució alge-  
brica.

**Enunciat 3.** Opereu i simplifiqueu sense utilitzar nombres decimals. Heu d'expressar el resultat en forma de nombre enter o de fracció d'enters.

$$a) \frac{7}{12} - \left( \frac{8}{27} - \frac{5}{6} \right) = \frac{7}{12} - \frac{16-45}{54} = \frac{7}{12} + \frac{29}{54} = \frac{63+58}{108} = \frac{121}{108}$$

$$b) \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{3}{8} - 1 = \frac{3-8}{8} = -\frac{5}{8}$$

$$c) 5.0\overline{54} - \frac{19}{11} = \frac{5054-50}{990} - \frac{19}{11} = \frac{5004}{990} - \frac{19}{11} = \frac{556}{110} - \frac{19}{11} = \frac{556-190}{110} = \frac{366}{110} = \frac{183}{55}$$

**Enunciat 4.** El nombre 2017 forma part de la successió 37, 41, 45, 49, ...? En cas negatiu expliqueu com heu arribat a aquesta conclusió i en cas afirmatiu raoneu en quin lloc es troba.

El terme general de 37, 41, 45, 49, ... és  $4m+33$  perquè és una progressió aritmètica de diferència 4 i el primer terme ha de ser 37.

Now, cal comprovar si hi ha un nombre natural "m" tal que

$$4m+33=2017.$$

$$4m=2017-33=1984$$

$$m=\frac{1984}{4}=496 \Rightarrow$$

Si que forma part de la successió i es troba en el lloc 496.

**Enunciat 5.** Presenteu en forma algebraica les frases següents:

El triple de la suma de dos números	$3(a+b)$ o també $3a+3b$
La quarta part d'un número més les dues terceres parts d'aquest número	$\frac{x}{4} + \frac{2x}{3}$ o també $\frac{11x}{12}$
El 65% d'un número	$\frac{65x}{100}$ o també $0,65x$
El quadrat de la suma de dos números	$(a+b)^2$ o també $a^2+2ab+b^2$
La suma dels quadrats de dos números	$a^2+b^2$

Enunciat 6. Resoleu: a)  $3x+5=5x+31$  b)  $12+\frac{x}{3}=x-12$  c)  $\frac{x}{5}-\frac{x+3}{10}=2-\frac{x+5}{2}$

a)  $3x+5=5x+31 \Leftrightarrow -26=2x \Leftrightarrow \boxed{x=-13}$

b)  $12+\frac{x}{3}=x-12 \xrightarrow{(\cdot 3)} 36+x=3x-36 \Leftrightarrow 72=2x \Leftrightarrow \boxed{x=36}$

c)  $\frac{x}{5}-\frac{x+3}{10}=2-\frac{x+5}{2} \xrightarrow{(\cdot 10)} 2x-(x+3)=20-5(x+5) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x-x-3=20-5x-25 \Leftrightarrow x-3=-5x-5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 6x=-2 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{1}{3}}$

Enunciat 7. Desenvolueu i simplifiqueu l'expressió  $(a+b)^2-(a-b)^2$ .

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2) =$$
$$= \cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}-\cancel{a^2}+2ab-\cancel{b^2} = \boxed{4ab}$$

Enunciat 8. Hem barrejat dues classes de cafè, Natural i Torrefacte, i hem obtingut un total de 20 kg que han costat 124€. El cafè Natural ha costat 8€/kg i el Torrefacte ha costat 5.50€/kg. Quants kg de cada classe de cafè hi ha a la barreja?

$x$  = nombre de Kg de cafè Natural  
 $y$  = " " " Torrefacte

Preu total: Nombre total de Kg:  $x+y=20$  kg  
 $8x+5.50y=124$  €

Utilitzem el mètode de substitució

$$y=20-x \Rightarrow 8x+5.50(20-x)=124 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x+110-5.50x=124 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.50x=124-110=14$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{14}{2.50} = 5.60 \text{ Kg de cafè Natural} \\ y = 20-x = 20-5.60 = 14.40 \text{ Kg de cafè torrefacte} \end{array} \right\}$$