

1. Un polígon té 5994 diagonals, quants costats té?

Cada diagonal està determinada per una parella de vèrtexs diferents i no consecutius del polígon. Quan triem una parella de vèrtexs per determinar una diagonal, l'ordre de l'elecció no importa. Per tant, una manera de calcular el nombre de diagonals és fer el recompte de totes les parelles de vèrtexs diferents en què l'ordre no importa, i restar les parelles de vèrtexs consecutius, és a dir el nombre de costats del polígon:

$$\text{Nombre de diagonals} = \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = 5994.$$

Consegüentment, hem de resoldre l'equació $n^2 - 3n - 11998 = 0$:

$$\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 11998 = 0 \iff n = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9 + 47992}{4}} = \frac{3 \pm 219}{2} = \begin{matrix} \nearrow & \boxed{111} \\ \searrow & -108 \end{matrix}$$

2. a) Calculeu: $VR_3^4 \cdot \binom{1002}{999} - V_{1002}^3$ b) Resoleu: $\frac{VR_x^2}{2} + C_x^2 - V_x^2 = 1001$

a) Recordem que $\binom{1002}{999} = \binom{1002}{3}$. Llavors,

$$3^4 \cdot \frac{1002 \cdot 1001 \cdot 1000}{3 \cdot 2} - 1002 \cdot 1001 \cdot 1000 = 1002 \cdot 1001 \cdot 1000 \left(\frac{3^3}{2} - 1\right) = \boxed{12537525000}.$$

b) Tenim $\frac{x^2}{2} + \frac{x(x-1)}{2} - x(x-1) = 1001$. És a dir,

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 - x}{2} - x^2 + x = 1001 \iff x^2 + x^2 - x - 2x^2 + 2x = 2002 \iff \boxed{x = 2002}.$$

3. El 32% d'individus d'una població tenen menys de 30 anys; el 42% tenen entre 30 i 60 anys; el 26% que queda tenen més de 60 anys. El 40% dels primers, el 30% dels segons i el 24% dels últims tenen els ulls blaus. Si triem un individu a l'atzar quina és la probabilitat que tingui els ulls blaus o més de 60 anys?.

Sigui:

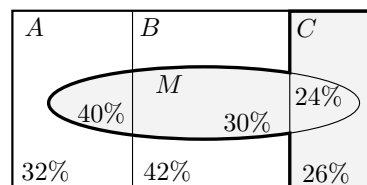
A = Població de menys de 30 anys.

B = Població entre 30 i 60 anys.

C = Població de més de 60 anys.

M = Població amb els ulls blaus.

Llavors, si observem el gràfic adjunt:



$$P(M \cup C) = P(M \cap A) + P(M \cap B) + P(C) = 0.40 \cdot 0.32 + 0.30 \cdot 0.42 + 0.26 = \boxed{0.514}.$$

4. En una caixa tenim totes les possibles boles numerades amb els nombres de set xifres diferents que es poden construir amb les xifres 1, 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

Calculeu la probabilitat que si agafeu una bola a l'atzar, aquesta estigui numerada amb un nombre que tingui el 2 i el 3 de costat. [Alguns casos favorables són 4231675, 5613274, ...]

Casos possibles: Totes les possibles ordenacions dels set nombres diferents: $P_7 = 7!$.

Casos favorables:

- Alternativa 1: Considerem 23 com un sol nombre i llavors es tracta de fer tots els canvis d'ordre possibles, sense repetició de 23, 1, 4, 5, 6, 7. És a dir P_6 . Després fem el mateix amb el 32. En resulten $2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6!$ casos favorables.

- Alternativa 2:

23 _ _ _ _ :	Nombres que	→ Col·leccions de 5 elements agatenen 23 en els dos primers llocs	fats de 2 en 2, en què importa l'ordre i no hi ha repetició.	$P_5 = 5!$
_ 23 _ _ _ :	Nombres que	→ Col·leccions de 5 elements agatenen 23 en els segon i tercer lloc	fats de 2 en 2, en què importa l'ordre i no hi ha repetició.	$P_5 = 5!$

Fem el mateix, quan el 2 es troba en el 3r, 4t, 5è i 6è llocs. Després es torna a repetir el raonament canviant del 23 al 32. En total en resulten $2 \cdot 6 \cdot P_5 = 2 \cdot 6!$ casos favorables.

Finalment, la probabilitat és $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2 \cdot \cancel{6!}}{7 \cdot \cancel{6!}} = \frac{2}{7}$.

5. Un pagès fa un estudi del diàmetre de les taronges de la seva collita de cara a la seva comercialització. Tria 60 taronges aleatòriament i troba les mesures, en cm, següents:

81	76	82	81	87	76	80	70	86	79
76	75	72	71	84	82	88	73	77	70
78	85	74	86	89	77	77	77	76	78
80	84	79	71	77	88	80	72	73	71
78	81	82	77	85	84	83	88	76	72
79	78	81	84	81	80	73	76	76	79

- Quina és la població, la mostra i la variable estadística?
- Elaboreu una taula estadística en què els valors de la variable estiguin agrupats en classes de longitud 4. En la taula han d'estar representades les freqüències absolutes, les relatives i els percentatges de cada classe.
- Representeu les freqüències absolutes de les cinc classes en un diagrama de sectors. [S'ha de fer constar el valor de l'angle central de cada sector.]

a) Població: Taronges de la collita.

Mostra: Les 60 taronges triades aleatòriament.

Variable estadística: La mesura dels diàmetres de les taronges.

b) La taula demanada és:

x_i	f_i	f_{r_i}	%
70-74	11	0.1833	18.33
74-78	15	0.2500	25.00
78-82	17	0.2833	28.33
82-86	10	0.1666	16.66
86-90	7	0.1166	11.66
	60	$0.998 \approx 1$	$99.98 \approx 100$

c) Els angles centrals dels sectors són proporcionals a les freqüències:

$$\frac{11}{60} \cdot 360^\circ = 66^\circ$$

$$\frac{15}{60} \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

$$\frac{17}{60} \cdot 360^\circ = 102^\circ$$

$$\frac{10}{60} \cdot 360^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{7}{60} \cdot 360^\circ = 42^\circ$$

