

1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui, sense utilitzar la calculadora ni els nombres decimals:

$$a) \frac{1 - \left(\frac{7}{18} - 10^{-1}\right)}{4 - 3.1\overline{8}}$$

$$c) \sqrt{7} + \frac{1}{\sqrt{28}} - \frac{\sqrt{1575}}{14}$$

$$b) \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3}$$

$$d) \frac{\sqrt{a^3 \cdot b^7} \cdot \sqrt[6]{a^5 \cdot b}}{\sqrt[15]{a \cdot b^{10}}}$$

$$a) \frac{1 - \left(\frac{7}{18} - 10^{-1}\right)}{4 - 3.1\overline{8}} = \frac{\frac{11}{18} + \frac{1}{10}}{4 - \frac{318 - 31}{90}} = \frac{\frac{55 + 9}{90}}{\frac{360 - 287}{90}} = \boxed{\frac{64}{73}}.$$

$$b) \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10} - 3} \cdot \frac{\sqrt{10} + 3}{\sqrt{10} + 3} = \frac{10 + 3\sqrt{10}}{10 - 9} = \boxed{10 + 3\sqrt{10}}.$$

$$c) \sqrt{7} + \frac{1}{\sqrt{28}} - \frac{\sqrt{1575}}{14} = \sqrt{7} + \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \frac{15\sqrt{7}}{14} = \left(1 + \frac{1}{14} - \frac{15}{14}\right) \sqrt{7} = 0 \cdot \sqrt{7} = \boxed{0}.$$

$$d) \frac{\sqrt{a^3 \cdot b^7} \cdot \sqrt[6]{a^5 \cdot b}}{\sqrt[15]{a \cdot b^{10}}} = \sqrt[30]{a^{45+25-2} b^{105+5-20}} = \sqrt[30]{a^{68} b^{90}} = \sqrt[15]{a^{34} b^{45}} = \boxed{a^2 b^3 \sqrt[15]{a^4}}.$$

2. Resoleu un dels dos problemes següents:

- a) Volem fer una mescla de dos tipus de cafè. El cafè *A* té un preu de 0.92 euros/kg i el cafè *B* té un preu de 1.20 euros/kg. Si el preu de la mescla ha de ser de 1 euro/kg, quin percentatge de cada cafè haurem de posar?
- b) Dos punts *A* i *B* estan separats per 120 km. Des del punt *A* surt, a les 8 h en direcció a *B*, un mòbil que porta una velocitat de 75 km/h. A les 8 h 40 min surt des de *B* un altre mòbil, en direcció a *A*, que porta una velocitat de 87 km/h. Cerca en hores, minuts i segons l'hora de trobada dels dos mòbils en el camí entre *A* i *B*.

a) Anomenem *T* el total de kg de cafè. Siguin *x* el nombre de kg de cafè de tipus *A*, i *T* - *x* el nombre de kg de cafè de tipus *B*. Llavors, ha de ser igual el preu de la barreja que la suma de preus dels dos cafès per separat:

$$1 \cdot T = 0.92 \cdot x + 1.2 \cdot (T - x).$$

Si dividim els dos costats de l'equació per *T*, obtenim l'equació en la incògnita $\frac{x}{T}$ que és igual al tant per un de kg de cafè de tipus *A*.

$$1 = 0.92 \cdot \frac{x}{T} + 1.2 \cdot \left(1 - \frac{x}{T}\right) \iff 0.28 \frac{x}{T} = 0.2 \iff \frac{x}{T} = \frac{0.2}{0.28} \iff \frac{x}{T} = 0.7143.$$

Conclusió:

Percentatge de tipus A=71.43%
Percentatge de tipus B=28.57%

b) Sigui x la distància que recorre el mòbil que surt de A fins que es troba amb el que surt de B :

	distància	velocitat	temps
A	x	75	t
B	$120 - x$	87	$t - \frac{40}{60} = t - \frac{2}{3}$
	km	km/h	h

Llavors,

$$120 - 75t = 87t - 58 \iff 162t = 178 \iff t = \frac{178}{162} \approx 1.098765432 \text{ h} = 1 \text{ h } 5 \text{ min } 5.6 \text{ s}.$$

Per tant, l'hora de trobada és 9 h 5 min 5.6 s.

3. Resoleu:

a) $x^2 - 10x + 23 = 0$.

b) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$.

c) $2x + \sqrt{\frac{2x}{3} - \frac{1}{4}} = 2$.

d)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{2} \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$$

a) $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 23}}{1} = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{1} = \begin{cases} 5 + \sqrt{2} \approx 6.414 \\ 5 - \sqrt{2} \approx 3.586 \end{cases}$

b) $x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 15}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases} \implies x^2 = 5 \implies x = \pm\sqrt{5}$.

$x^2 = -3$ no dona solucions reals perquè un real positiu no pot ser negatiu.

c) $\sqrt{\frac{2x}{3} - \frac{1}{4}} = 2 - 2x \implies \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} = 4 + 4x^2 - 8x \implies 8x + 3 = 48 + 48x^2 - 96x \implies \implies 48x^2 - 104x + 51 = 0 \implies$

$$\implies x = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 2448}}{48} = \frac{52 \pm 16}{48} = \begin{cases} \frac{68}{48} = \frac{17}{12} \\ \frac{36}{48} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Comprovació:

$x = \frac{3}{4}$ és solució perquè $\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \\ 2 - 2\left(\frac{3}{4}\right) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$x = \frac{17}{12}$ no és solució perquè $\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{17}{12} - \frac{1}{4}} = \frac{17}{18} - \frac{1}{4} = \frac{34 - 9}{36} = \frac{25}{36} \\ 2 - 2\left(\frac{17}{12}\right) = 2 - \frac{17}{6} = -\frac{5}{6} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\text{d) } \left. \begin{array}{l} x = \frac{3-5y}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{11}{2} \end{array} \right\} &\implies \frac{3}{3-5y} + \frac{1}{y} = \frac{11}{2} \iff 6y + 6 - 10y = 33y - 55y^2 \iff \\
&\iff 55y^2 - 37y + 6 = 0 \iff \\
&\iff y = \frac{37 \pm \sqrt{1369 - 1320}}{110} = \frac{37 \pm 7}{110} = \begin{array}{l} \nearrow \frac{2}{5} \\ \searrow \frac{3}{11} \end{array} \iff \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{2}{5}, \quad x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3}{11}, \quad x = \frac{6}{11} \end{array} \right.
\end{aligned}$$

4. L'àrea d'un rectangle mesura 10 m². Si augmentem la longitud d'un costat 20 cm i disminuïm la de l'altre costat 2.5 m, l'àrea del rectangle resultant és la mateixa. Quina és la longitud dels costats del rectangle inicial?

Anomenem x i y les longituds en decímetres dels costats del rectangle inicial.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ (x+2)(y-25) = 1000 \end{array} \right. &\iff \left\{ \begin{array}{l} x \cdot y = 1000 \\ -25x + 2y = 50 \end{array} \right. \implies x = \frac{2y-250}{25} \implies \\
&\implies \frac{2y-250}{25} \cdot y = 1000 \implies 2y^2 - 50y - 25000 = 0 \implies \\
&\implies y = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 50000}}{2} = \frac{25 \pm 225}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 125 \\ \searrow -100 \end{array} \implies \\
&\implies x = \frac{1000}{125} = 8 \implies \boxed{y = 12.5 \text{ m}, \quad x = 0.8 \text{ m}}.
\end{aligned}$$