

1. Opereu i simplifiqueu **tres** dels apartats següents. (Sense calculadora i sense utilitzar els nombres decimals.)

a)  $\frac{9}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$       b)  $4 - \frac{8}{3} \cdot \frac{6}{4}$       c)  $\frac{2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}}{\left(2 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{6}}$       d)  $1.14\overline{3} \cdot \frac{297}{12}$

a)  $\frac{9}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{27 - 12 + 4}{24} = \boxed{\frac{19}{24}}$ .

b)  $4 - \frac{8}{3} \cdot \frac{6}{4} = 4 - \frac{48}{12} = 4 - 4 = \boxed{0}$ .

c)  $\frac{2 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{3}}{\left(2 - \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{6}} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{\frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{25}{24}} = \frac{3 \cdot 24}{4 \cdot 25} = \boxed{\frac{18}{25}}$ .

d)  $1.14\overline{3} \cdot \frac{297}{12} = \frac{1143 - 11}{990} \cdot \frac{297}{12} = \frac{1132 \cdot 297}{990 \cdot 12} = \frac{566 \cdot 3}{10 \cdot 6} = \frac{283 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \boxed{\frac{283}{10}}$ .

2. Raoneu, sense calculadora, si són certes o falses les afirmacions següents:

a)  $\sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{8}$       b)  $\sqrt{x\sqrt{x}} = 0.125$  implica que  $x = \frac{1}{16}$

a) És certa perquè  $\begin{cases} \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}. \\ \sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (1 + 2)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$

b) És certa perquè

$$\sqrt{x\sqrt{x}} = 0.125 \implies \sqrt{\sqrt{x^2 \cdot x}} = \frac{1}{8} \implies (\sqrt[4]{x})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \implies \sqrt[4]{x} = \frac{1}{2} \implies x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

3. Trieu i resoleu **una** qüestió entre les dues següents:

- a) Fa quatre anys la Maria va fer un ingrés de 2460 € en un compte sotmès a un règim d'interès compost anual constant i desconegut. Al cap d'aquests quatre anys el capital inicial s'ha convertit en un capital de 2715.40 €. Expresses en percentatge l'interès anual.
- b) Els cinc primers classificats en una cursa es reparteixen els 6375 € de premi en metàl·lic de manera que el primer rep 5 vegades més que l'últim, el segon 4 vegades més, el tercer 3 vegades més i el quart 2 vegades més. Trobeu els euros que rebrà cadascun d'ells.

a) Si l'interès anual és  $x\%$  tenim,

$$2715.40 = \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 \cdot 2460 \implies \left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = \frac{2715.40}{2460} \implies 1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{\frac{2715.40}{2460}} = 1.0250019.$$

Llavors,  $x = (1.0250019 - 1) \cdot 100 = 2.50019 \implies \boxed{\text{interès anual} = 2.50\%}$ .

b) Segons l'enunciat, si  $x$  és el valor del premi del cinquè classificat es compleix,

$$6375 = x + 2x + 3x + 4x + 5x = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)x \implies 6375 = 15x \implies x = \frac{6375}{15} = 425.$$

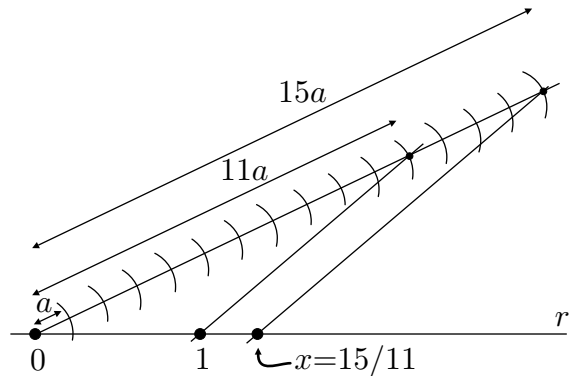
Consegüentment els premis són  $\boxed{425 \text{ €}, 850 \text{ €}, 1275 \text{ €}, 1700 \text{ €}, 2125 \text{ €}}$ .

4. Trieu i resolcu **una** qüestió entre les dues següents:

- Dibuixeu sobre la recta numèrica, amb regle no graduat, compàs i escaire, el nombre  $1.\overline{36}$ . Justifiqueu amb un raonament clar la construcció.
- Dibuixeu sobre la recta numèrica, amb regle no graduat, compàs i escaire, el nombre  $\sqrt{12}$ . Justifiqueu amb un raonament clar la construcció.

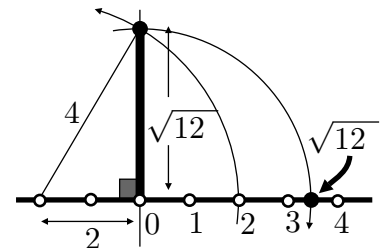
a) Observem que  $1.\overline{36} = \frac{136 - 1}{99} = \frac{135}{99} = \frac{15}{11}$ .

Els punts marcats sobre la recta auxiliar els hem traçat separats per distàncies iguals a  $a$  i les dues rectes transversals les hem traçat paral·leles. Llavors, pel teorema de Tales, els segments interceptats sobre la recta auxiliar i la recta numèrica  $r$  són proporcionals. Si presentem les proporcions, observem que el punt retolat amb la lletra  $x$  representa el nombre  $1.\overline{36}$ . Efectivament,

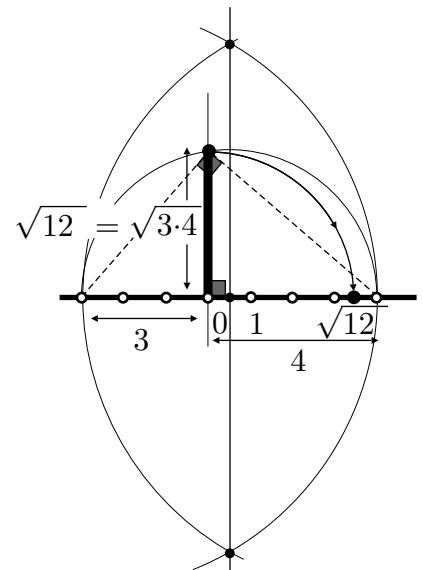


$$\frac{15a}{11a} = \frac{x}{1} \iff x = \frac{15a}{11a} = \frac{15}{11} = 1.\overline{36}.$$

b) **Resolució 1.** Si tenim en compte que  $\sqrt{12} = \sqrt{4^2 - 2^2}$ , només caldrà construir un triangle rectangle amb un catet de mesura 2 i la hipotenusa de mesura 4. Llavors, pel teorema de Pitàgores l'altre catet tindrà mesura  $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ .



**Resolució 2.** El triangle  $\triangle ABC$  és rectangle perquè, pel teorema de l'angle inscrit, l'angle  $\angle ABC$ , amb extrems dels costats sobre els extrems del diàmetre, val la meitat de l'arc de  $180^\circ$  que subtendeix sobre la circumferència. Llavors, pel teorema de l'altura,  $BH = \sqrt{AH \cdot HC}$ . És a dir, el segment  $BH$  mesura  $\sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12}$  en relació a la unitat que ha servit per construir les  $3 + 4 = 7$  unitats de base.



5. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan sigui el cas, **dos** dels apartats següents. (Sense calculadora)

a)  $\sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt{a}}$     b)  $\frac{6 + \sqrt{48}}{\sqrt{3} - 1}$     c)  $\frac{\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{80}}{\sqrt{125}}$     d)  $\frac{\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[4]{a \cdot b^3}}$

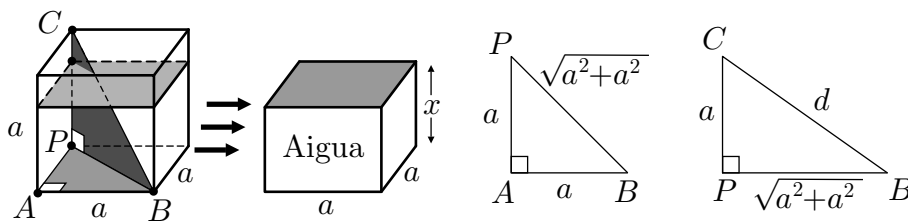
a)  $\sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt{a}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{24} + \frac{1}{8}} = a^{\frac{18+5+3}{24}} = a^{\frac{26}{24}} = \sqrt[24]{a^{26}} = a^{\frac{24}{24}\sqrt{a^2}} = a \sqrt[12]{a}$ .

b)  $\frac{6 + \sqrt{48}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{6 + \sqrt{48}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{6\sqrt{3} + 6 + \sqrt{144} + \sqrt{48}}{3 - 1} = \frac{6\sqrt{3} + 6 + 12 + 4\sqrt{3}}{2}$   
 $= \frac{18 + 10\sqrt{3}}{2} = \boxed{9 + 5\sqrt{3}}$ .

c)  $\frac{\sqrt{45} - 3\sqrt{20} + 2\sqrt{80}}{\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 5} - 3\sqrt{4 \cdot 5} + 2\sqrt{16 \cdot 5}}{\sqrt{25 \cdot 5}} = \frac{3\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 8\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} = \boxed{1}$ .

d)  $\frac{\sqrt{a \cdot b} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b}}{\sqrt[4]{a \cdot b^3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{6+8-3}{12}} \cdot b^{\frac{6+4-9}{12}} = a^{\frac{11}{12}} \cdot b^{\frac{1}{12}} = \boxed{\sqrt[12]{a^{11} \cdot b}}$ .

6. La diagonal d'un contenidor en forma de cub mesura  $\sqrt{12}$  m. En el seu interior s'han emmagatzemat 6400 litres d'aigua. Calculeu a quina altura arriba l'aigua dins del cub.



Per trobar l'altura  $x$  de l'aigua caldria saber la mesura de l'aresta  $a$  del cub i, així podríem utilitzar la relació  $6400 \text{ l} = 6.4 \text{ m}^3 = a^2 \cdot x$ .

Aplicuem el teorema de Pitàgores als triangles rectangles de la figura i obtindrem l'aresta  $a$  del cub,

$$a^2 + (\sqrt{a^2 + a^2})^2 = d^2 \implies 3a^2 = d^2 \implies a^2 = \frac{d^2}{3} = \frac{12}{3} = 4 \implies a = 2 \text{ m.}$$

Per tant,  $6.4 \text{ m}^3 = a^2 \cdot x \implies x = \frac{6.4}{a^2} = \frac{6.4}{4} = \boxed{1.6 \text{ m}}$ .