

1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu:

a) $\sqrt{x^4y\sqrt[3]{x^9y^{10}\sqrt[5]{x^{16}y}}}, \quad \frac{\sqrt[3]{x\sqrt{x}\sqrt[6]{x^5}}}{\sqrt{x^3\sqrt[3]{x^5}}}, \quad \frac{\sqrt{32\sqrt{12}} - \sqrt[4]{243} + \sqrt[8]{59049}}{\sqrt[4]{3}}$

b) $\frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{\sqrt{48} + \sqrt{18}}, \quad \frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt{27}}, \quad \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}, \quad 2\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{27} + \frac{1}{4}\sqrt{12} - 3\sqrt{\frac{75}{9}}$

c) $\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x\sqrt{x^9}}}}}{\sqrt[8]{x}}, \quad \frac{\sqrt{(0,001)^3\sqrt[3]{250^{-2}}}}{\sqrt[3]{500}}, \quad \frac{\sqrt{(ab)^{-2}\sqrt{a^3c}}}{\sqrt[3]{c^2a}}$

d) $\frac{x^2y - xy}{1 - \sqrt{x}}, \quad \frac{x^2y - xy^2}{y^2 - 2xy + x^2}, \quad \frac{x^3y(9x - 1)}{\sqrt[5]{x^7y^3(3\sqrt{x^3} - x)}}$

2. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu:

a) $\frac{(x + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x}}$ b) $\sqrt{\frac{16}{3}} + \sqrt{243} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{75}$

c) $\frac{\sqrt{xy}\sqrt[3]{x^7y^2}}{\sqrt[3]{x^{11}y^4}}$ d) $\frac{3}{\sqrt{4 - \sqrt{7}}}$.

3. Trobeu, sense utilitzar al calculadora, el valor numèric de:

a) $160000^{\frac{3}{4}}$ b) $0,0001^{-\frac{3}{4}}$ c) $0,008^{-\frac{2}{3}}$ d) $32^{-0,2}$ e) $\frac{5}{3375^{\frac{1}{3}}}$

4. Demostreu, sense utilitzar els nombres decimals, que $\sqrt[7]{5625} > \sqrt[4]{135}$.

5. Demostreu que $\sqrt{67 - 42\sqrt{2}}$ es pot expressar com $a + b\sqrt{2}$, en què $a, b \in \mathbb{Z}$.

6. Trobeu el quocient i el residu de la divisió entre els polinomis:

a) $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8$ i $q(x) = 3x^2 - 2$.

b) $p(x) = 8x^3 - 3x + 1$ i $q(x) = 4x^2 - 5$.

Comproveu que satisfan la definició de divisió.

7. Donat el polinomi $p(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$:

a) Trobeu la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x) > 0$.

8. Donat el polinomi $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 21x - 10$:

a) Trobeu la seva descomposició factorial.

b) Resoleu la inequació $p(x) \leq 0$.

c) Simplifiqueu $\frac{4x+11}{p(x)} + \frac{1}{3x^2+5x+2}$.

9. Simplifiqueu:

a) $\frac{1}{x^2-1} - \frac{3}{x^6-1}$ c) $\frac{1}{x^4+5x^2+6} + \frac{1}{x^2+3}$
 b) $\frac{\frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{2x^2+2x}}{\frac{1}{x^2-x}}$ d) $\frac{5}{10x^3+17x^2-7x-2} + \frac{1}{5x^2+11x+2}$

10. El polinomi $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ dona el mateix residu en dividir-lo per $x+3$ que en dividir-lo per $x-2$. A més, $p(x)$ és múltiple de $x-4$. Trobeu a i b .

11. Trobeu la descomposició factorial de:

a) $8-x^3$ b) $x^3-61x-180$ c) $12x^4+11x^3+2x^2$ d) x^8-x^4-20 .

Indicació: A l'apartat d), quan trobeu que s'ha de descompondre x^4+4 , completeu la igualtat $x^4+4 = \left(x^2 + \square\right)^2 - \square^2$.

12. Opereu i simplifiqueu:

a) $\frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2}$ c) $\frac{4}{3x-1} + \frac{30x}{9x^2-1} - \frac{5}{3x+1}$
 b) $\frac{6x^4+33x^3+48x^2+66x+72}{x^4+4x^3+2x^2+8x}$ d) $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)(x^5+x^4)$

13. Cerqueu els valors de a per als quals es pot simplificar la fracció racional

$$\frac{x^3-7x^2+ax+16}{x^2-3x-4}.$$

14. Resoleu amb l'ajut de gràfics de rectes i/o paràboles les inequacions següents:

a) $x^3+6x^2+11x+6 \geq 0$ b) $64-x^6 < 0$ c) $4x^4+8x^3-5x^2-18x-9 < 0$

15. Trobeu els valors de m per als quals existeix $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2+(m-4)x+m-1=0$.

16. Presenteu la fracció racional següent, com la suma d'un polinomi més una fracció racional en què el grau del numerador sigui menor que el grau del denominador:

$$\frac{3x^5+x^3-7x+1}{x^3+x-2}.$$

Indicació: Dividiu els dos polinomis.

17. Demostreu que el resultat de sumar 1 al producte de quatre nombres naturals consecutius, sempre és un quadrat perfecte. (Exemple: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 = 361 = 19^2$.)

Indicació: Si el polinomi $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ de grau 4 és un quadrat perfecte, es pot escriure $(x^2+bx+c)^2$.

18. El tercer terme del desenvolupament de $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ és de segon grau. Calculeu n i feu el desenvolupament de la potència del binomi resultant.
19. Trobeu el valor numèric del coeficient del terme quinzè del desenvolupament del binomi $\left(16 + \frac{x}{2}\right)^{18}$.
20. Trobeu les arrels del polinomi
- $$p(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{x}{2} + \binom{n}{2} \frac{x^2}{4} + \binom{n}{3} \frac{x^3}{8} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{x^n}{2^n},$$
- en què $n \in \mathbb{N}$.
21. Desenvolpeu el binomi $(2 - x)^4$.
22. Sigui el binomi $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^n$ tal que $\binom{n}{3} = \binom{n}{2} + 950$. Trobeu el valor numèric del terme del desenvolupament que no conté x .
23. Esbrineu si el desenvolupament de $\left(x^{72} - \frac{2}{x^{13}}\right)^{100}$, té algun terme de grau 84.
24. Sigui el polinomi $p(x) = 2x + 4x^2 + 6x^3 + 8x^4 + \cdots + 2sx^s$, en què $s \in \mathbb{N}$. Calculeu el residu que resulta de dividir-lo per $x - 1$.
25. Cerqueu, sense calcular els coeficients binomials, el valor numèric de $\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} 5^k$.
26. Demostreu que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Indicació: $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$.

Solucions:

1. a) $x^4 y^2 \sqrt[30]{xy^6}$, $\frac{1}{x}$, 8
b) $\frac{19}{5} - \frac{41\sqrt{6}}{30}$, $\frac{2}{9}\sqrt[4]{27}$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $-\frac{13\sqrt{3}}{2}$
c) $\sqrt[16]{x^9}$, $\frac{\sqrt[6]{2 \cdot 5^3}}{5^8 \cdot 2^6}$, $\frac{\sqrt[12]{a^5 c^7}}{abc}$
d) $-xy(\sqrt{x}+1)$, $\frac{xy}{x-y}$, $(3\sqrt{x+1})\sqrt[5]{x^3 y^2}$
2. a) $x\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 2x$. b) $5\sqrt{3}$. c) $\frac{\sqrt[6]{xy^5}}{xy}$. d) $\sqrt{4+\sqrt{7}}$.
3. a) 8000. b) 1000. c) 25. d) 0,5. e) $\frac{1}{3}$.
5. Es pot escriure com $7 - 3\sqrt{2}$, o bé $-7 + 3\sqrt{2}$.
6. a) Quocient: $\frac{2}{3}x - 1$. Residu: $\frac{4}{3}x + 6$. b) Quocient: $2x$. Residu: $7x + 1$.

7. a) $(x-2)(x+3)(x^2+4)$. b) $]-\infty, -3[\cup[2, +\infty[$.
8. a) $(x+1)(2x-5)((3x+2)$. b) $]-\infty, -1]\cup[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}]$. c) $\frac{6}{6x^2-11x-10}$.
9. a) $\frac{x^2+2}{x^4+x^2+1}$. b) $x-\frac{1}{2}$. c) $\frac{1}{x^2+2}$. d) $\frac{2}{10x^2-3x-1}$.
10. $a = -\frac{33}{20}$, $b = -\frac{173}{20}$.
11. a) $(2-x)(x^2+2x+4)$. b) $(x+4)(x+5)((x-9)$.
c) $x^2(4x+1)(3x+2)$. d) $(x+\sqrt[4]{5})(x-\sqrt[4]{5})(x^2+\sqrt{5})(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.
12. a) $\frac{4-2x}{x^2-1}$. b) $6+\frac{9}{x}$. c) $\frac{9}{3x-1}$. d) x^3+2x^2-1 .
13. $a = 8$.
14. a) $x \in [-3, -2] \cup [-1, +\infty[$. b) $x \in [-2, 2]$. c) $x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right[\cup \left]-1, \frac{3}{2}\right[$
15. $m \in]-\infty, 2] \cup [10, +\infty[$.
16. $3x^2-2+\frac{6x^2-5x-3}{x^3+x-2}$.
18. $n = 4$, $x^8-8x^5+24x^2-\frac{32}{x}+\frac{16}{x^4}$.
19. 12240.
20. $x = -2$.
21. $x^4-8x^3+24x^2-32x+16$.
22. 4845.
23. En cas d'existir el terme hauria d'ocupar el lloc 83,7..., la qual cosa no pot ser.
24. s^2+s .
25. 279936