LA MATEMÀTICA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓ DE PROBLEMES.

UNA INVITACIÓ A LA PARTICIPACIÓ I A LA CREATIVITAT A L'AULA

MEMÒRIA DEL TREBALL REALITZAT DURANT EL PERÍODE DE LLICÈNCIA

Romà Pujol Pujol
Curs 2005/2006

Direcció/Supervisió
Lluís Bibiloni Matos i Jordi Deulofeu Piquet,
professors de la Universitat Autònoma de Barcelona

La lectura del document electrònic té l'avantatge que els enllaços condueixen a la pàgina referenciada
`http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Llicencia/LLICENCIA.pdf`

La realització d'aquest treball ha estat possible gràcies a una llicència retribuïda concedida pel Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. (DOGC núm.: 4471 de 16.9.2005)

Aquest estudi s'ha realitzat en el marc del projecte sobre Pensament Crític i Educació Matemàtica (conv. 8599, proj. 165004) del grup PREMAT que forma part de la «Xarxa de Recerca per a l'Educació Matemàtica i Científica (REMIC)», Ref. U2201 U9UAB 2005, finançada pel Departament d'Universitats i Recerca (DURSI) de la Generalitat de Catalunya, dins del Pla de Recerca i Innovació (PRI) 2005-2008.

En el mes d'abril de 2006 s'ha publicat a PRAXIS, pertanyent al Grup Editorial WOLTERS KLUWER, l'article *«La resolución de problemas. Una visión práctica sobre la construcción cíclica del conocimiento matemático»*. Aquesta publicació, autoritzada pel Departament d'Educació en data 13 de desembre de 2005 (registre 050964 de 15.12.2005), està directament relacionada amb el contingut d'aquesta memòria.

Cal transmetre les intuïcions bàsiques dels problemes matemàtics, l'essència del fet matemàtic, i deixar en un segon terme la tècnica pròpia de la disciplina. Aquesta tècnica, tan vital per al professional de la matemàtica, és secundària i pot ser evitada.

*(*PLA I CARRERA, *1998, pàg. 25)*

Quant de camí caldrà recórrer (i falta recórrer encara en molts centres) fins arribar a la classe taller, a la càtedra sense estrada, a la càtedra sense càtedra, en la que el professor sense lloc especial per ell, està, en canvi, per tot arreu!

*(*PUIG ADAM, *1960, pàg. 97)*

Índex

Presentació

Algun dia vam aprendre a caminar i anys després sabíem córrer; tot i que moltes vegades vam caure. Caure està permès, el que no està permès és no aixecar-se. Un dia ens van ensenyar a sumar i anys després fèiem unes «llargues» sumes que anomenàvem sèries. Sovint ens vam equivocar però no sempre vam aprendre dels errors comesos; sovint vam caure però no tots i no sempre ens vam aixecar. Acceptaríem que hi hagués persones que no caminessin perquè les caigudes els van desanimar a seguir intentant-ho? Acceptem que hi hagi alumnes que abandonin l'aprenentatge de la matemàtica perquè la incorrecta utilització de l'error els ha portat al desànim i el desencant?

En aquest estudi es mirarà de donar una mica de llum a un estil d'ensenyament que apropi l'alumne cap a un aprenentatge de la matemàtica útil més enllà de l'àmbit d'acció d'aquesta. Per corregir-ho es mostrarà com es pot treballar la resolució de problemes a la classe de matemàtiques. La idea de fons que rau en cadascun dels exemples es desprèn de la reflexió realitzada a partir de les aportacions de Pólya, Puig Adam, Courant i Robbins, etc. Des d'aquest marc teòric es mostrarà tota una colla d'idees fonamentals que s'il·lustraran amb exemples concrets. S'apuntarà el camí que cal seguir per dissenyar i escollir activitats que atenguin l'objectiu essencial que s'exposa a continuació (pàg. IX).

Els plans d'estudis disposen, d'entre altres, de diversos objectius amb la finalitat que l'alumne desenvolupi plenament les seves possibilitats. Potser un cert col·lectiu amb uns determinats interessos podria preferir la instrucció dogmàtica de determinats coneixements. Acceptem però que la nostra societat reclama un ensenyament creatiu que fomenti l'esperit crític en els alumnes, així com també en els docents. Mirem per un moment d'establir un únic objectiu que caracteritzi en essència l'ensenyament que ens proposem impartir. Aquest esforç de síntesi és fonamental ja que l'estil d'ensenyament que emprarem depèn d'ell.

Tot aquest estudi té sentit si acceptem que la principal finalitat de l'ensenyament de la matemàtica és ensenyar els nostres alumnes a PENSAR. Així ho crec i si estic equivocat ben poca cosa del que aquí escric pugui ser d'utilitat. Una enorme alegria em va omplir el dia que vaig descobrir que PÓLYA (1981) ja ho havia escrit i exposat en el catorzè capítol del seu tercer llibre *Mathematical Discovery* l'any 1962. La coincidència de les meves idees amb les de Pólya és la causa de que el citi en moltes ocasions al llarg d'aquest estudi. Canviar les seves paraules seria desvirtuar el seu contingut tot perdent la profunditat que té, o seria plagi encobert ja que expressaria el mateix que ell diu.

Des dels grans resultats de la matemàtica fins la resolució de les activitats més properes a l'alumne, *un contacte real amb el contingut de la matemàtica viva és necessari* (COURANT i ROBBINS, 1979, pàg. 9). La construcció del coneixement hauria de traslladar la transparència del que per l'alumne és indubtable als resultats finals, tot evitant el que podria considerar, des del seu punt de vista, maniobres matemàtiques desvinculades del seu sentit comú. Si no esdevé aquesta construcció aleshores no hi ha comprensió efectiva. Si l'ensenyament es reitera en la falta d'aquesta comprensió aleshores arriba a l'alumne com una col·lecció de lleis, normes o manaments que el converteixen en un ser obedient sense independència intel·lectual, cada vegada més com més avança el seu procés d'aprenentatge.

L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes prioritza, per sobre dels continguts, un treball mental que generi en l'alumne un hàbit d'autoaprenentatge, anàlisi, decisió, descobriment i creació útil per la resta de la seva vida. El professor el guiarà per tal que sigui cada vegada més independent, crític, autocrític i responsable de la construcció del seu propi coneixement.

Tot i que el primer dels llibres de George Pólya va ser publicat l'any 1944, el segon l'any 1954 i el tercer l'any 1962, entre els anys seixanta i setanta del segle XX l'educació matemàtica va optar per la «Matemàtica Moderna», un estil d'ensenyament ben apartat de la proposta de Pólya. L'anomenada «Matemàtica Moderna» va incidir en les estructures abstractes (principalment en l'àlgebra), rigor lògic (lluny d'aspectes manipulatius i experimentals), teoria de conjunts, geometria analítica (deixant de banda la geometria sintètica i amb presència minsa encara ara a l'ensenyament secundari), ...

La reforma cap a la «Matemàtica Moderna» es va produir en mig del corrent clarament formalista dels bourbakistes entre els quals en formava part Jean Dieudonné, un dels pares de la «Matemàtica Moderna». La majoria dels docents d'avui en dia hem estat formats en la segona meitat del segle XX i ens proposem exercir l'acció educativa amb alumnes de principis del segle XXI. Malauradament l'exclusiva presència de la «Matemàtica Moderna» en molts de nosaltres ha estat incisiva. Si volem oferir un ensenyament que doni resposta al moment actual, haurem de vetllar per saber on anem, és a dir, conèixer la nostra feina, i saber d'on venim, és a dir, ser conscients de com hem après. L'estat de la qüestió és particularment delicat en les matemàtiques, ja que la forta presència del raonament logicodeductiu a les facultats no es pot remetre a les aules de secundària sense més ni més. Cal doncs que tinguem molt clar quins són els objectius principals que ens proposem en l'ensenyament de la matemàtica. En aquest estudi la finalitat principal s'ha explicitat en el quart paràgraf d'aquest pròleg.

Des de la perspectiva actual és raonable preguntar-se perquè va néixer la «Matemàtica Moderna». En la primera meitat del segle XX hi va haver una forta preocupació pels fonaments de la matemàtica. Va arribar a l'educació matemàtica el que preocupava als matemàtics d'aquell moment i les directrius educatives van prioritzar el rigor per sobre de la creativitat. Tot i així, si la matemàtica és una ciència que té un caràcter empíric en el seu procés de creació aleshores cal que l'experimentació amb els objectes matemàtics sigui palesa en el dia a dia de l'ensenyament d'aquesta. Majoritàriament hom està d'acord en deixar la formalització per etapes posteriors a la secundària obligatòria. Queda però una tasca lenta i difícil: diagnosticar i fer arribar aquesta pràctica docent a les aules de manera generalitzada.

L'ús adequat de les diferents metodologies que s'han utilitzat en l'ensenyament de la matemàtica i les aportacions de més de mig segle d'investigació en resolució de problemes són components esporàdics o desconeguts en la pràctica educativa, i les diagnosis realitzades (Competències Bàsiques, PISA, TIMMS, etc.) evidencien i demanen una millora en la transferència de resultats entre la comunitat d'experts i les aules; així com en sentit invers, per tal que les recerques responguin a les necessitats de la nostra societat.

Els problemes no poden jugar un paper subsidiari que els limiti a ser l'instrument per aplicar els mètodes de resolució que genera la teoria prèviament exposada. L'investigador matemàtic primer conjectura on vol arribar, després raona fins a consolidar resultats. L'aprenentatge de la matemàtica no s'hauria d'apartar tant del seu procés d'invenció i creació i, per tant, caldria facilitar que fos l'alumne qui, a través de la resolució de problemes, anés requerint les eines teòriques necessàries. Educar requestant el raonament dels nostres alumnes hauria de subrogar l'erudició de resultats segellats. El pensament viu que acompanya la matemàtica no pot ser transmès a partir de resultats tancats i morts (veure per exemple la proposició 4.5.3 de la pàgina 111).

El clima de l'aula dirigit pel professor, generant, forçant i fins i tot provocant la participació de l'alumne fomenta el descobriment d'aquest i el posa en la situació que els grans matemàtics van viure en el seu moment. L'activitat, la creació, la motivació, la participació, les conjectures, les correccions i errors en el sentit més positiu, l'exposició per escrit i oral dels resultats, la crítica i autocrítica raonada i exposada educadament i respectuosa entre moltes altres han de ser pràctiques habituals entre els nostres alumnes i, per tant, en primer lloc entre els professors.

Al llarg d'aquest document s'exposaran diferents estils d'ensenyament de la matemàtica des de la proposta de Pólya. La repercussió de cadascun d'aquests estils en el procés d'aprenentatge, donarà orientacions que serveixin de guia per als docents i les editorials. S'establiran els principis fonamentals sobre disseny, creació i selecció d'activitats, tot aprofundint en alguns aspectes del currículum, que permetin aplicar estratègies integrades de resolució de problemes fent ús de diferents heurístiques i des de diferents models: Pólya, Mason-Burton-Stacy, Miguel de Guzmán, etc. L'aprenentatge del raonament matemàtic emprarà la resolució de problemes com el mitjà més eficient. La transmissió de receptes i algorismes ha de deixar pas al tractament de les estratègies que les han creat.

Sembla que hi ha un acord majoritari respecte que les TIC (Tecnologies de la Informació i de la Comunicació) han de tenir un paper prioritari en l'ensenyament, en particular, de la matemàtica. Cal incidir però en la comprensió dels processos matemàtics més que no pas en l'execució de rutines que amb tanta facilitat poden inundar el temps dels nostres alumnes. I la millor manera d'evitar-ho és fer-ne ús tot ensenyant a conjecturar amb les aplicacions que ens ofereixen les TIC. L'alumne farà servir calculadores, ordinadors i altres productes tecnològics tant si volem com si no volem, per tant, per tal que en faci una correcta utilització cal que en la pràctica habitual disposi de la nostra guia i orientació. Les noves tecnologies poden integrar-se en l'ensenyament de la matemàtica amb finalitats diametralment oposades. Així, el software que permeti efectuar càlculs numèrics o simbòlics podria conduir a incrementar l'exposició de resultats tancats ja que les seves aplicacions poden ser exemples reals que, tot i que rutinaris, requereixin gran potència de càlcul. L'ordinador ha de ser una eina que s'empri en la resolució de problemes per experimentar, observar, proposar conjectures i contrastar-les, en definitiva, una eina al servei de la creativitat. No perdem de vista que l'alumne té gran facilitat en l'ús de les noves tecnologies i, en conseqüència, haurem d'orientar la seva utilització per tal que estiguin al servei de l'alumne i no aquest a disposició d'elles.

L'actitud del docent per tal que la resolució de problemes a l'aula esdevingui una eina que faciliti la creativitat és fonamental. Molts són els factors que poden influir en aquesta actitud del docent però sens dubte el primer i fonamental és l'interès i el gust que aquest mostri per la matèria. La força amb la que es retenen els coneixements conquerits es contraposa a la inestabilitat amb la que es recorden els coneixements transmesos. Dit d'una altra manera, res s'aprèn millor que allò que un aprèn per sí mateix i, per tant, el paper del docent com a guia curricular de l'alumne ha de tenir, cada vegada més, un paper més destacat. L'acció del docent com a guia fa que sigui el propi alumne qui vagi descobrint els diferents continguts per sí mateix; de fet, així la humanitat ha arribat fins els nostres dies. I, si la humanitat ha comès errors, que molts han estat, més raons tenim encara per formar els nostres estudiants sota un estil d'ensenyament, la resolució de problemes, que fa dels errors una font d'aprenentatge. *Tal com observa agudament Rey Pastor, no es la possessió de bens, en aquest cas intel·lectuals, sinó la seva adquisició, el que proporciona a l'home les majors satisfaccions* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 104).

El diàleg a l'aula permet copsar els interessos i dificultats dels nostres alumnes i, per tant, guiar-los cap a maneres de pensar, treballar i actuar que els permetin descobrir per sí mateixos. Els pitagòrics no van enunciar el teorema de Pitàgores sinó que van trobar una relació entre els costats d'un triangle rectangle. No els ensenyem, per tant, el teorema de Pitàgores, ajudem-los a descobrir aquesta relació, ajudem-los a conjecturar-la. Aprendre conjecturant facilita a l'alumne la construcció del seu propi coneixement.

Les estratègies algorísmiques que tanta força han pres en l'ensenyament de la matemàtica donen garantia i seguretat en la resolució d'un exercici on siguin aplicables, però les TIC mai haurien d'anar només en aquest sentit. Al llarg de la vida l'alumne es trobarà en moltes situacions que no es resolen de manera algorísmica i la resolució de problemes situa l'estudiant en una posició sovint incòmode que força la seva capacitat autònoma. Les estratègies heurístiques no garanteixen efectivitat de resolució però permeten afrontar cada problema tot forçant el seu pensament crític i creatiu. Aquestes condueixen a un tipus de raonament que podrà ser d'utilitat per l'alumne més enllà de l'aula de matemàtiques. En un món en canvi constant com el nostre, l'educació ha de seguir camins en els quals l'elecció sigui inevitable, la correcció un hàbit i l'error un motiu per l'aprenentatge. La resolució de problemes conduirà a l'establiment de patrons generals que posteriorment puguin ser d'utilitat. A més, com a estil d'aprenentatge li servirà a l'alumne en els seus estudis superiors, en la investigació, en el món laboral i al llarg de la seva vida ja que els hàbits que inculca tenen un valor que no es limita al món de la matemàtica. La necessitat de donar rigor als raonaments matemàtics sorgirà, en particular, quan l'alumne arribi a conjectures errònies. Deixem que descobreixi aquesta necessitat i fem de l'error una eina fonamental per l'aprenentatge, vist així, *els problemes són el cor de la matemàtica* (HALMOS, 1980, pàg. 524).

Aquest estudi intenta de mantenir l'esperit de la resolució de problemes atenent al currículum de l'ensenyament secundari. L'exploració de situacions reals és senzillament fonamental i els problemes matemàtics que neixen d'aquestes i la seva modelització no només permeten l'aplicació de la resolució de problemes sinó que no hi ha cap altra manera de tractar-los, excepte l'aplicació de resultats que prèviament així s'han generat. L'ensenyament creatiu i participatiu a l'aula de matemàtiques requereix trencar amb la idea de que la matemàtica és pesada, inútil i difícil.

No hi ha una recepta màgica sobre com aprendre, ensenyar i aprendre a ensenyar, però sí que hi ha principis, actituds i metodologies que faciliten un aprenentatge actiu, motivat i creatiu i, per tant, condueixen a un ensenyament de qualitat.

Estructura del treball

Aquesta memòria es presenta sota una estructura de capítols que pren la seva màxima justificació quan es pensa en una lectura seqüencial. Tot i així, he intentat que cadascun d'ells contingui una unitat de coneixement que permeti ser llegida i compresa amb independència dels altres capítols, si s'atenen els requisits explícits de cada paràgraf d'aquest apartat. Per tal que això sigui possible i amb la finalitat d'aconseguir claredat expositiva, en diverses ocasions es fa referència a d'altres parts de la memòria. Els cinc primers capítols estableixen el marc teòric de la recerca realitzada que es sintetitza en el sisè capítol, en el qual no s'exposa, per tant, el marc teòric d'aquesta recerca.

La introducció es presenta com a primer capítol. A partir d'un breu resum de diagnòstics es fa un passeig general, sense presència d'exemples, per l'ensenyament de la matemàtica al llarg del segle XX, la resolució de problemes, l'activitat docent i l'avaluació. El contingut d'aquest capítol admet una lectura divulgativa que considero recomanable per als docents novells així com pel gran públic interessat en l'ensenyament de la matemàtica.

En el segon capítol s'exposen i exemplifiquen les aportacions de Pólya. A partir del seu mètode de quatre passos es treballen problemes que donen llum a l'especialització, generalització, analogia i inducció tot conduint el lector a veure la deducció com la consolidació de resultats prèviament construïts. El tractament dels problemes condueix a copsar la importància de l'actitud del docent i a presentar el decàleg de George Pólya; en el desenvolupament de cada problema es fa sovint referència a la citada actitud. Aquest capítol es pot llegir de manera independent dels altres tot i que si s'evita la introducció es perd de vista, entre d'altres, el perquè Pólya, que va publicar els seus llibres a meitat del segle XX, no va prendre un paper més rellevant en l'educació matemàtica fins entrat el darrer quart de segle.

En el tercer capítol es presenten les principals aportacions sobre l'ensenyament de la matemàtica en la línia de la resolució de problemes que hi va haver a partir de les exposades en el capítol anterior. Entre d'altres, les aportacions didàctiques de Puig Adam, l'estudi del bloqueig i l'autocontrol de Mason, Burton i Stacey, la metacognició de Shoenfeld i les didàctiques de Miguel de Guzmán completen les ja exposades. Donat que les aportacions d'aquest capítol són, en gran mesura, conseqüència i complement de les de George Pólya, es recomana la lectura prèvia del segon capítol, en el cas que el lector no hi estigui familiaritzat.

El quart capítol se centra en el plantejament de problemes. A partir de resultats d'estudis ja realitzats s'analitzen diversos problemes tot atenent el marc teòric exposat en els dos capítols anteriors; es fa palesa, entre d'altres, la gran diferència entre exercicis i problemes. L'ensenyament cíclic queda exhaustivament exemplificat amb la resolució de problemes que admeten un tractament experimental apte des dels primers cursos de l'Ensenyament Secundari Obligatori. Aquesta experimentació marca el camí cap a l'observació i la formulació de conjectures que condueixen cap a la presa de consciència relativa a la necessitat de rigor. Aquests exemples mostren com l'especialització, la generalització, l'analogia i la inducció, com a pràctiques possibles des d'edats prematures, faciliten la resolució de problemes en la que les conjectures tenen un paper fonamental. El camí seguit per aquestes marca la direcció que poden seguir les futures demostracions, tot facilitant la seva aparició en el moment adequat i de manera natural. Es mostra com la traducció d'un problema des d'un punt de vista a un altre, relatiu a una altra branca de la matemàtica o en la mateixa, no és només una ajuda pel matemàtic sinó que ho és també pel docent. El capítol finalitza amb l'exposició de conclusions relatives al tractat en aquest capítol. Aquest pot tenir una lectura independent dels anteriors si el lector ja està familiaritzat amb la resolució de problemes i els seus principals resultats.

El cinquè capítol se centra en la construcció de fórmules i algorismes. S'exemplifica com des del treball experimental, l'alumne pot arribar a construir resultats que, de moment sense rigor, poden ser admesos des d'un punt de vista conjectural, mostrant de nou com es pot introduir el raonament lògicodeductiu que permeti consolidar resultats. En aquest procés apareix novament el mètode cíclic com element fonamental per la construcció del coneixement. Es mostra a continuació com la construcció d'algorismes segueix també un camí semblant al de les fórmules. La seva utilitat es posa en dubte mirant així d'obrir una reflexió sobre el present i el futur. S'exemplifica com un resultat tancat i ferm, en ocasions complex, pot ser tractat amb la utilització de recursos, principalment informàtics, per ser experimentat i observat apropant-lo així al sentit comú de l'alumne. El capítol finalitza amb l'exposició de conclusions. De la mateixa manera que en l'anterior, aquest capítol pot tenir una lectura independent dels anteriors si el lector ja està familiaritzat amb la resolució de problemes. A més, el quart i cinquè capítol també poden ser llegits amb independència l'un de l'altre.

El darrer capítol d'aquesta memòria es dedica a una recerca concreta. Es comença justificant la necessitat d'aquesta atenent les recents indicacions de la comunitat d'experts i els aspectes normatius actuals i futurs immediats (Pacte Nacional per a l'Educació). Es contextualitza la recerca i s'exposen les seves característiques per donar pas a la concreció del problema de recerca. Es delimita el problema, s'estableixen els objectius i s'escull l'instrument més apropiat. Es desenvolupen les diferents fases d'elaboració d'aquest i, recollides les dades, es fa la seva anàlisi. Finalment s'exposen els resultats, conclusions i les implicacions didàctiques.

Tot i que la resolució de problemes condueix a un llenguatge mínimament tècnic, s'ha intentat que fos assequible per a tothom. Amb l'objectiu d'arribar a tot el professorat es presenten diversos accessos a miniaplicacions de JAVA i a espais web que fan recomanable la lectura del document digital, si no es vol prescindir d'elles. L'exemplificació de l'ensenyament cíclic, que permet donar un tractament a un problema en edats prematures i evolucionar-lo fins estudis superiors, fa que el llenguatge emprat en ocasions vagi una mica més enllà del que es pot considerar acceptable per un alumne de secundària; quan això passa és perquè, tal com s'indica, el tractament del problema està situat en una etapa superior.

Capítol 1

Introducció

Índex

1.1 Preliminars

Aquest estudi proposa diversos objectius fortament relacionats entre sí. Tots ells miren, però, d'aconseguir un material de suport i orientació per a docents i editorials que faciliti l'assoliment dels objectius i les competències de l'àrea de matemàtiques. Les diferents metodologies que s'han fet servir en l'ensenyament de la matemàtica, més de mig segle d'investigació en resolució de problemes, i les avaluacions realitzades al sistema educatiu, motiven aquest estudi. S'aprofundirà en la resolució de problemes a l'educació secundària atenent a la realitat actual a Catalunya i prioritzant, per sobre de tot, ensenyar a pensar els nostres alumnes i fomentar-los la creativitat.

L'ensenyament adequat per part d'un docent requereix necessàriament el coneixement del present i del passat respecte de les metodologies relacionades amb l'aprenentatge. El present per conèixer les possibilitats d'actuació a l'aula, i el passat per corregir les accions que són fruit de la formació que hem rebut els docents. El bon funcionament de l'ensenyament de la matemàtica requereix l'aplicació de metodologies adequades, que no es vegin influïdes per les tendències adquirides pel docent en la seva etapa d'estudiant i que ara no responen al que la societat ens demana.

Els docents d'avui en dia hem estat formats en la segona meitat del segle XX, i ens proposem exercir l'acció educativa amb alumnes de del segle XXI. Si volem oferir un ensenyament de qualitat, haurem de vetllar per complir a grans trets dos requisits: saber on anem, és a dir, conèixer la nostra feina, i saber d'on venim, és a dir, ser conscients de com hem après. El docent que amb gran coneixement de la seva feina no reflexioni sobre com ha après, caurà fàcilment en la temptació de formar com l'han format. Aquest punt és especialment delicat en les matemàtiques de secundària, ja que la forta presència del raonament logicodeductiu a les facultats no es pot traslladar a les aules de secundària sense més ni més.

Els canvis en els mètodes d'ensenyament tenen els seus efectes a llarg termini i, per tant, els resultats de les avaluacions realitzades cal que siguin jutjats amb perspectiva històrica. La «Matemàtica Moderna», que vista la seva manca d'efectivitat pot caure fàcilment en la instrucció i/o en la matemàtica bàsica, no hauria de ser present a les aules. Els resultats de les diagnosis realitzades requereixen una reflexió. Desenvolupar l'habilitat dels alumnes per resoldre problemes ja figura en el currículum des de fa uns anys, i la seva aplicació a les aules requereix un saber fer per part del docent que aquest treball pretén orientar.

1.2 La contribució de l'ensenyament de la matemàtica a la formació integral de l'alumne

Sovint sentim a dir que l'ensenyament de la matemàtica és indispensable per a la formació d'un alumne. Quan es demana una justificació el més corrent que se sent a dir és que *ensenyen a pensar*. Aquest apartat mira d'anar una mica més enllà per tal de concretar el que es vol dir. Aquesta és una qüestió que probablement tots els qui estem lligats a l'ensenyament de la matemàtica ens hauríem de plantejar i alhora mirar de respondre. Aquest estudi es podria realitzar sense entrar en aquesta difícil qüestió, però és fonamental si es pretén enfocar adequadament l'ensenyament de la matemàtica en cada etapa educativa. Tinc present també que, escrigui el que escrigui, no trigaré gaire temps a voler-ho completar o, fins i tot, a voler fer-ne algun retoc. Per tant, exposo el que en aquest moment la meva experiència, formació i consciència em diuen.

Hi ha tota una sèrie de motius que justifiquen l'ensenyament de la matemàtica. Estic particularment interessat, en aquest apartat, en tots aquells que són rellevants més enllà de la matemàtica i del seu ensenyament. El coneixement d'aquests el considero fonamental ja que si la matemàtica ha de tenir una certa incidència en el futur de tots els alumnes aleshores el seu ensenyament ha de respondre, principalment en l'ensenyament obligatori, a les seves futures necessitats.

El que de manera generalitzada es pot veure escrit, destaca la importància del caràcter *instrumental*[1] de la matemàtica. Efectivament els adults i no tan adults requereixen d'un coneixement de la matemàtica que els permeti actuar en la vida quotidiana. Així, és fonamental que l'alumne es familiaritzi amb els percentatges, proporcions, càlcul aritmètic, etc, així com amb tots els continguts de primària. Ara bé, en el moment que volem justificar els continguts relacionats amb l'àlgebra, la trigonometria, etc. (pensant en un ensenyament obligatori) no podem amagar el cap sota l'ala. Per aclarir idees, considerem un alumne que en el seu futur es dediqui a la jardineria; requerirà d'aquests coneixements?

Atès el gran volum de persones que no es dediquen professionalment a la matemàtica, queda justificada aquesta pregunta que miraré de respondre, des del meu punt de vista en la mesura que em sigui possible.

Si la ciència és important la matemàtica és essencial. Com a punt de partida no perdem de vista *l'indubtable benefici que el progrés de la ciència rep dels progressos del seu ensenyament* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 93). El món real és complex i la ciència crea models matemàtics per tal d'interpretar-lo. Així, la comprensió del món real està lligada, en gran mesura, al coneixement de la matemàtica. S'entén gràcies a aquestes i a models matemàtics de la ciència que fan

[1] A l'educació secundària obligatòria s'ha de valorar d'una manera especial el caràcter instrumental de la matemàtica...(DOGC núm. 3670 - 04/07/2002).

ús d'elles. En els primers anys d'aprenentatge és molt més factible que el nen aprengui d'un problema matemàtic simplificat que no pas d'un problema real; la complexitat d'aquest de ben segur que el desborda. La matemàtica facilita la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d'aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l'alumne tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat.

La matemàtica ensenya a aprendre a prendre decisions. Prendre decisions és un fet que tots hem après, no es pot eludir al llarg de la vida. Aprendre a prendre decisions va una mica més enllà i està relacionat amb l'esperit crític i la visió global. Si a l'alumne li diem que un problema, com pot ser la trisecció de l'angle amb regle i compàs, no té solució, poc haurà après. Si a més fem que experimenti en geometria (imprescindible l'ús de les TIC) i que vegi per ell mateix que sí que es pot trisecar, però no si només fem ús de regle i compàs, haurà après molt més. Si un problema no es pot resoldre, potser variant les condicions o emprant més recursos sí que serà resoluble; això va més enllà de la matemàtica. Facilitem així que la presa de decisions per part de l'alumne no es limiti a les condicions i recursos estrictes de cada moment.

L'error és una font d'aprenentatge. Permeteu-me que faci ús de la petita experiència per dir que en matemàtiques (i probablement en cap matèria millor que en aquesta) és ben fàcil proposar problemes que encaminin cap a l'establiment de conjectures, els seus contrastos, detecció, anàlisi i gestió d'errors, noves conjectures, etc, fins arribar a construir teories que poden ser aplicades de manera generalitzada en molts altres problemes de la disciplina que ens ocupa o d'altres. És fonamental que l'error sigui una font d'aprenentatge i l'estil d'ensenyament-aprenentatge que es proposa en aquest estudi segueix aquesta línia. I, si la incompleta informació de que disposo no m'enganya, tinc la impressió que tots (també jo m'hi incloc) tenim molt a aprendre sobre el fet de fer dels errors una font d'aprenentatge, en particular, perquè abans cal acceptar-los.

Defensa d'arguments orals i per escrit. Els problemes condueixen a l'establiment de conjectures[2]. La intuïció i el pensament de l'alumne li diuen que són certes i probablement és així. Ara bé, és molt diferent defensar, oralment o per escrit, un resultat que s'obté per aplicació d'una fórmula o d'un algorisme que no pas defensar una conjectura. Aquesta darrera porta l'alumne a exposar els arguments que l'han conduït a establir-la però sabent que no té la seguretat que sigui certa, ja que si s'hagués demostrat no seria una conjectura, seria un teorema[3]. Aquesta incertesa és molt més propera a la vida real que no pas la seguretat a la que es pot arribar amb el raonament lògicodeductiu propi dels resultats ferms.

[2]Entenent per conjectura aquell resultat que, sota el judici de qui la fa, és plausible de ser cert però que s'ha establert per indicis i presumpcions d'observacions experimentals.

[3]Entenent per teorema una veritat demostrable lògicament partint d'axiomes o de d'altres teoremes ja demostrats.

La importància d'haver après a discernir entre el que és essencial i el que és prescindible. Consolidar/Aplicar resultats tancats no permet treballar la facultat d'intuir ja que l'alumne no ha de decidir ni crear sinó que ha de mimetitzar raonaments i/o aplicar resultats coneguts. La resolució de problemes força l'alumne a decidir, a preveure les conseqüències de les seves decisions, a avaluar el que està fent i a defensar les seves conclusions sense poder-se recolzar en un resultat prèviament exposat. L'error com a font d'aprenentatge condueix l'alumne a centrar-se en el que és essencial i a analitzar críticament les seves intuïcions, per tal d'evitar les conseqüències negatives d'una certa acció. *Per prendre decisions en la vida no n'hi ha prou de fer una anàlisi minuciosa de les circumstàncies que puguin influir en una cert decisió que pretenem superar; és precís tenir una intuïció clara d'aquelles de major pes...* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 102).

La importància de l'ensenyament creatiu a l'aula (vista a llarg termini). Si l'alumne no crea aleshores no genera coneixement. En aquest cas hi pot haver assimilació de continguts però no necessàriament evolució intel·lectual. En matemàtiques és més que possible, amb l'estil d'ensenyament-aprenentatge adequat, generar coneixement en l'alumne des d'edats tendres. En línies generals i sense entrar en massa detalls podem dir que de la Grècia Clàssica a l'Edat Mitjana la creació de nou coneixement es va convertir en la no creació. Si això no hagués passat probablement la màquina de vapor hauria existit força segles abans, ...

La importància de l'ensenyament creatiu a l'aula (vista a curt-mig termini). Serveix o no serveix en funció de l'objectiu que establim. Entenent que es pretén formar persones autònomes i crítiques que sàpiguen acceptar els propis errors, i alhora les virtuts de les altres persones, l'ensenyament de la matemàtica pot contribuir a facilitar que això sigui possible. A través de la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, per tal de no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir l'error comès. Quantes vegades hem vist errors grans, públics i universalment coneguts on les persones que els han comès els neguen i argumenten una justificació amb les premises convenients? Aquest tipus de comportament és conseqüència d'una formació on l'individu tendeix a enquistar-se en els errors comesos i no voler-los acceptar.

La importància de dedicar temps amb continuïtat a l'ensenyament de la matemàtica. Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata d'aquests hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, comprendre'ls, establir plans de treball, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou fins obtenir-ne una que sigui plausible de ser certa, proposar la solució, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps, molt de temps. Així, l'àrea de matemàtiques requereix de moltes hores i amb continuïtat per a l'alumne, evitant fragmentar el seu ensenyament en crèdits variables, matèries optatives, ...

De la matemàtica instrumental (primària) a l'educativa (secundària); dos ci-

cles previs a la professionalització (universitària). Des del caràcter instrumental que predomina en l'ensenyament de la matemàtica a primària fins al professional de l'universitària, hi ha un cicle on ha de predominar el caràcter educatiu. Aquest no té perquè coincidir exactament amb l'etapa secundària, però de ben segur que al llarg d'aquestes edats (12a-18a) és on aquest cicle esdevé. L'ensenyament secundari agafa el relleu de l'etapa anterior i, començant pel caràcter instrumental d'aquesta, que prioritza l'aprenentatge d'uns certs continguts fonamentals per la vida en la nostra societat, continua amb l'aprenentatge d'uns continguts propis d'una formació que, superada la part instrumental, prioritza la formació humana i creativa dels alumnes així com el seu pensament crític. Julio Rey Pastor fa una clara i sintètica exposició on el que ell anomena batxillerat es correspon a l'actual període educatiu comprès entre els dotze i els divuit anys.

Aquesta divisió en tres períodes: instrumental, educatiu i professional, no exclou la preocupació educativa en tots ells; però mentre en l'ensenyament de la matemàtica a primària l'educació és un mitjà per arribar als coneixements, a secundària són els coneixements el mitjà necessari per arribar a l'educació mental. Aquí tenim, per tant, una diferència d'essència que no és purament quantitativa, entre l'ensenyament primari i el secundari. Mentre que un mestre d'escola s'ha de considerar completament fracassat si els seus alumnes surten a la vida sense les eines indispensables, el que significa saber llegir, escriure i calcular correctament; en canvi un batxillerat que no hagi deixat en la memòria dels alumnes sòlidament gravada per sempre cap declinació llatina, cap fórmula trigonomètrica, cap espècie botànica, podrà ser, tanmateix, un batxillerat eficaç si ha aconseguit despertar en l'alumne l'afició per la lectura d'obres literàries, l'hàbit de raonament acurat, l'amor a la natura i el sentit d'observació, perquè, al cap i a la fi, aquest imponderable que s'anomena cultura general no és sinó allò que queda en l'esperit després d'haver oblidat tot allò après en el període escolar (Rey Pastor i Puig Adam, 1933, pàg. 3).

Tinc tota la impressió que em deixo aspectes rellevants per esmentar, però tot i així, el que s'ha exposat marca la filosofia de fons que amara aquest estudi.

1.3 Hipòtesi de partida i objectius

Les diagnosis realitzades i els resultats obtinguts en recerca de didàctica de la matemàtica mostren la necessitat de fer arribar als docents orientacions sobre resolució de problemes que permetin la seva aplicació significativa a les aules.

La hipòtesi fonamental d'aquest estudi parteix del fet que, diagnosticades les mancances actuals en l'ensenyament de la matemàtica, i vistes les possibilitats de millora que ens ofereixen les investigacions realitzades, cal donar guies i orientacions que facilitin l'aplicació de la resolució de problemes.

Em proposo, per tant, assolir els següents objectius:

1. Respecte de l'epistemologia

   Exposar una síntesi de la resolució de problemes tot contrastant-la amb altres estils d'ensenyament i aprenentatge.

2. Respecte de les activitats, les heurístiques i els models

   Establir els principis fonamentals sobre disseny, creació i selecció d'activitats que permetin aplicar estratègies integrades de resolució de problemes disciplinars així com d'altres àmbits fent ús de diferents heurístiques i des de diferents models: Puig Adam, Pólya, Mason-Burton-Stacey, Miguel de Guzmán.

3. Respecte de l'activitat docent

   Presentar i exemplificar estratègies d'actuació a l'aula que permetin al professor establir hàbits mentals eficients i creatius en els seus alumnes.

   Modelar situacions problemàtiques del món real tot formulant preguntes i proposant tasques que motivin i comprometin el pensament dels alumnes.

4. Respecte dels recursos

   Seleccionar, justificar i proposar recursos que facilitin la integració de la resolució de problemes en l'ensenyament de la matemàtica.

5. Respecte de l'avaluació

   Proposar instruments d'avaluació que centrin l'atenció en la resolució de problemes i, més enllà de valorar l'adquisició final de coneixements, siguin una eina reguladora del procés d'ensenyament-aprenentatge.

1.4 Resum de resultats i diagnosis

En aquest apartat s'exposen els resultats de tres diagnosis: les competències bàsiques, l'informe PISA i *The mathematics report card* de DOSSEY *et al.* (1988). Catalunya obté una qualificació mitjana. Al llarg d'aquesta memòria s'exposa un estil d'aprenentatge actiu i creatiu que, en atenent aquests resultats, faciliti la millora en l'ensenyament de la matemàtica.

1.4.1 Competències bàsiques

En la síntesi de resultats corresponent a les proves de competències bàsiques del curs 2003/2004[4], veiem que un dels aspectes amb un assoliment més baix ha estat el corresponent a les competències que fan referència a:

1. Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les si no es mostren prou eficaces (M5). Un 33% de l'alumnat ho supera de manera consistent i un 53% de manera suficient.

Es tracta del resultat més baix que es pot trobar respecte de l'àrea de matemàtiques, i dels més baixos de tota la prova de competències bàsiques. L'estudi detallat de les proves realitzades i els seus resultats són un important referent per a aquesta recerca.

1.4.2 Informe PISA

Aquest estudi coordinat per l'Organització per la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic, OECD, avalua el nivell d'aprenentatge i les capacitats bàsiques dels estudiants de 15 anys en comprensió lectora, matemàtiques i ciències. La primera prova es va realitzar l'any 2000 i va prioritzar la lectura; la segona, realitzada l'any 2003, es va centrar en matemàtiques, i el 2006 ho farà en Ciències.

L'informe PISA (Program for International Student Assesment) de l'any 2003 així com el document de l'any 2000, disponibles a *http://www.oecd.org* i a l'espai web del Departament d'Educació, donen informació fonamental per establir el punt de partida d'aquesta recerca.

La matemàtica mostra la capacitat dels estudiants per analitzar, raonar i transmetre idees d'una manera efectiva, i també per plantejar i resoldre problemes en diferents situacions. En l'estudi PISA, però, també es va pensar que, quan es tracta d'aplicar la matemàtica a situacions de la vida diària, és més important la capacitat de l'alumne per establir un raonament quantitatiu i representar relacions o interdependències, que saber respondre a les preguntes típiques dels enunciats curriculars dels temes.

L'alumnat avaluat s'agrupa en sis nivells de suficiència, segons la puntuació que ha obtingut. Per sota de 358 està en el nivell més baix, i per sobre de 699 en el nivell més alt. Cada 62 punts separen un nivell del següent. L'estudi PISA utilitza quatre subdimensions: quantitat, espai i forma, canvi i relacions, incertesa. Els resultats obtinguts a Catalunya són 506, 482, 488 i 495 respectivament.

[4] `http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/LEst/sintesicb.zip`

1.4.3 Altres estudis

A més dels resultats de la prova de competències bàsiques i de l'estudi PISA, a continuació es mostra un altre estudi realitzat als Estats Units d'Amèrica. La seva claredat ens fa veure les mancances de l'ensenyament de la matemàtica en altres indrets del planeta.

En l'informe *The mathematics report card: are we measuring up?*, DOSSEY *et al.* (1988) mostren que en el 78% de les hores lectives cursades pels alumnes de 13-14 anys a USA, els procediments i les idees van ser mostrades, però no van ser explicades ni desenvolupades. El 96% del temps emprat pels estudiants a les aules es va dedicar a practicar procediments que se'ls havien mostrat prèviament. S'ensenyen procediments de càlcul, però es posa poca atenció en les idees conceptuals i a relacionar procediments amb conceptes.

La instrucció matemàtica en les aules de secundària pot caracteritzar-se, amb petites variacions, com l'activitat que consisteix en l'explicació del contingut per part del professor, el treball individual dels alumnes sobre tasques proposades i la seva correcció. La majoria de les vegades, i a causa de la dificultat del contingut o de la manca de temps, l'explicació es dirigeix al nivell mig de la classe o al més alt, i a l'aprenentatge memorístic de determinats algorismes o definicions tal com diu DOSSEY *et al.* (1988).

Els informes preliminars del TIMSS[5] suggereixen un enfocament molt més formalista. El resultat és un protagonisme dels aprenentatges rutinaris, buits de significat, i la construcció d'esquemes conceptuals poc significatius. Els mestres i professors ensenyen de la mateixa manera que van ser ensenyats a l'escola. Els resultats del TIMSS són similars als resultats exposats en l'informe PISA, tot i les diferències existents entre aquestes proves.

La prova TIMSS aplicada a estudiants de 13 anys d'edat permet conèixer el nivell d'educació en ciències i en matemàtiques amb una referència internacional. La prova LLECE[6] realitza un estudi comparatiu en les àrees de llengua i matemàtiques.

1.5 L'ensenyament de la matemàtica en el segle XX

1.5.1 La primera meitat del segle XX

En els primers anys del segle XX les escoles es caracteritzaven per prioritzar la memorització mecànica de conceptes i l'enumeració de fets que en general tenien un escàs significat per a l'alumne. En l'ensenyament secundari (a partir dels

[5]Disponible a `http://isc.bc.edu`
[6]Disponible a `http://llece.unesco.cl`

dotze anys; que en aquell moment es deia batxillerat) la finalitat primordial era el desenvolupament del sentit lògic. Es pretenia que l'alumne adquirís una comprensió clara dels teoremes a desenvolupar, de les seves deduccions i de la seva utilització. Mentre l'alumne no pogués fer ús del raonament lògic s'optava per impartir tècniques i algorismes.

Sobre l'any 1930 un grup de matemàtics formats a l'*École Normal Supérieur de París*, van formar el grup Bourbaki[7]. La «Matemàtica Moderna» va optar per aquesta tendència.

Tot i així, ja *a l'inici d'aquest segle* (fa referència al segle XX) *començava a manifestar-se la inquietud pedagògica en l'ensenyament mitjà, principalment a Alemanya i Anglaterra, on ja es criticava l'eficàcia dels mètodes tradicionals d'ensenyament de la matemàtica* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 97).

Va ser aquesta preocupació creixent per modificar la instrucció educativa, tot anant cap al desenvolupament de les habilitats intel·lectuals del alumnes, entre les quals es trobava l'habilitat per resoldre problemes, la que va desencadenar aquest canvi. La idea bàsica d'aquell moment ja era que els coneixements vigents podien resultar desfasats al cap d'uns quants anys, i el millor servei que l'escola podia donar als seus alumnes no era el de comunicar fets i conceptes, sinó desenvolupar procediments generals que poguessin ser aplicables a una àmplia varietat de problemes i situacions amb què es troba un ciutadà mitjà.

1.5.2 La «Matemàtica Moderna»

A finals dels anys cinquanta es produeix un canvi important en l'ensenyament de la matemàtica, conegut com la «Nova Matemàtica» o «Matemàtica Moderna».

L'any 1959, el famós matemàtic francès Jean Dieudonné va promoure un important canvi tot proposant d'oferir als estudiants un ensenyament basat en el caràcter deductiu de la matemàtica. El seu crit *«Fora Euclides»* defensava la geometria analítica en contraposició amb la sintètica. Es pretenia transmetre als alumnes el caràcter logicodeductiu de la matemàtica, i al mateix temps es volien unificar els continguts fent ús de la teoria de conjunts, les estructures algebraiques i els conceptes de relació i funció de la matemàtica superior. La llei va desplaçar la gènesi; *posem regles de joc i juguem*[8].

El fracàs de la «Matemàtica Moderna» en els anys setanta va donar pas a l'intent de generar entorns de qualitat en l'ensenyament i l'aprenentatge de la matemàtica, tot motivant que educadors de tot el món es plantegessin què calia fer

[7] El grup Bourbaki va adoptar el nom de Nicolas Bourbaki, general francès de la guerra francoprussiana.

[8] *Posem regles de joc i juguem.* Aquesta frase la va citar un matemàtic de l'escola de la «Matemàtica Moderna» en el Congrés de Filosofia de la Ciència a París l'any 1949 i il·lustra amb claredat aquesta tendència que ha arribat fins als nostres dies (PUIG ADAM, 1960, pàg. 115).

MOON (1986). Amb el fracàs de la «Matemàtica Moderna» van néixer nous moviments renovadors. Entre aquests està l'anomenat *Back to Basic* que va suposar per a la matemàtica escolar retornar a la pràctica d'algorismes i procediments elementals de càlcul.

1.5.3 La resolució de problemes

Back to basic no era la solució per a l'ensenyament de la matemàtica. Els alumnes, en el millor dels casos, aprenien de memòria els procediments sense entendre'ls. Però, què és bàsic? Atès que la «Matemàtica Moderna» no tenia futur, calia ensenyar matemàtica bàsica? Però, què és matemàtica bàsica? Aquestes preguntes van ser puntals del III Congrés Internacional d'Educació Matemàtica (ICME), que es va fer a Berkeley l'estiu de l'any 1980. La resolució de problemes, *the problem solving*, es proposà que es convertís en una tasca a desenvolupar, a interpretar i a aplicar.

En aquest congrés, H. Freudenthal va suggerir com a eix d'interès els problemes que apareixen en l'educació matemàtica com una activitat social i no només com un element de la investigació educativa. Freudenthal optà per un enfocament particular i individual que permetés tractar el problema personal que un alumne pogués tenir amb l'aprenentatge. Pólya opinà que els professors havien de concretar i particularitzar els problemes derivats de l'ensenyament tot investigant els aprenentatges individuals per donar solucions als fracassos escolars i obtenir-ne elements de diagnosi.

Les respostes es van començar a proposar posteriorment i en diversos llocs del món. Així, el National Council of Teachers of Mathematics NCTM (1988) va afirmar categòricament a *An Agenda For Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* que el canvi més gran que havien d'afrontar les matemàtiques escolars era fer que la resolució de problemes es convertís en el focus principal del seu ensenyament i aprenentatge. Al Regne Unit un informe semblant es publicava dos anys després, l'anomenat *Informe Cockcroft* CITMS (1985).

1.5.4 El plantejament de problemes

El plantejament de problemes és tant important com la seva resolució. L'art de formular preguntes suggerents és sens dubte tan difícil com el de donar respostes correctes. En la realitat de les nostres aules sovint és molt més difícil per als alumnes proposar qüestions, per elementals que siguin, que no pas resoldre-les. Tractar preguntes obertes donant respostes que es vagin aproximant a la solució, els ofereix més dificultats que no pas buscar solució a qüestions tancades. Els professors de matemàtiques poc sovint demanen als seus alumnes que proposin problemes que precisin matemàtiques significatives. I la dificultat que experimentem els adults en el plantejament de problemes és conseqüència en gran mesura de l’educació que vam rebre a l’escola. Els alumnes se senten molt més còmodes davant de preguntes de l’estil *Quant val...?* que no pas de l’estil *Quant pot ser...?* en les quals hi ha diverses possibilitats.

La cultura tradicional associada amb les classes de matemàtiques és la de proposar qüestions tancades que es poden respondre ràpidament i que els alumnes poden prendre com a model del tipus de preguntes possibles pel proper examen.

En el darrer quart del segle XX, el plantejament i la resolució de problemes va portar a incidir en la formulació de preguntes relacionades amb què s’esdevé en la ment dels estudiants quan intenten resoldre problemes.

A la segona meitat dels anys vuitanta, en diversos llocs del món s’havia iniciat el moviment que defensava que calia escriure el que es pensava en matemàtica. En els darrers estudis es reconeix que la resolució de problemes està influïda per factors del llenguatge, pel medi social i cultural de l’aprenentatge i per l’ús d’imatges. L’anotació per escrit dels mètodes, estratègies i raonaments condueix els alumnes a una reflexió general que té efecte sobre l’aprenentatge dels conceptes matemàtics. No és gens fàcil, però, ensenyar els alumnes a expressar per escrit les seves reflexions ni tampoc a formular-se preguntes i enunciar problemes.

1.5.5 Diferents estils d’ensenyament de la matemàtica

1. Estructuralisme

   Per a l’estructuralisme, la matemàtica és una ciència logicodeductiva, i aquest és l’enfocament que li pretén donar. L’estructuralisme és el principi fonamental de l’anomenada «Matemàtica Moderna», l’efecte de la qual no hauria de predominar a les aules de matemàtiques en l’ensenyament obligatori.

2. Mecanicisme

   L’estil mecanicista es caracteritza per considerar la matemàtica com un conjunt de regles que s’ensenyen als alumnes i que han d’aplicar a exercicis similars als que se’ls ha mostrat prèviament. En l’enfocament mecanicista no és habitual partir de problemes reals o propers a l’alumne, es dóna importància a la memòria i l’automatització. No s’analitzen els conceptes ni els procediments. Tot i que aquest plantejament de l’ensenyament de la matemàtica ha estat durament atacat, potser encara cal que el professorat prengui consciència de les seves mancances educatives.

3. Empirisme

   Parteix de la realitat propera a l'alumne, és a dir, d'exemples concrets. Es proposa que l'ensenyament rebut per l'alumne li sigui útil. S'aprenen continguts i procediments útils, però no s'aprofundeix en l'aprenentatge, tot perdent l'esperit crític de l'alumne.

4. Realisme

   També parteix de la realitat propera a l'alumne, com l'empirisme, però a diferència d'aquest proposa aprofundir en els aprenentatges mirant de desenvolupar models que li puguin ser útils en situacions posteriors. És l'alumne qui construeix la matemàtica.

El National Council of Teachers of Mathematics va proposar a la dècada dels anys vuitanta que l'ensenyament de la matemàtica s'havia d'enfocar des de la resolució de problemes. Aquestes etapes no finalitzen, però, d'un dia per l'endemà, i la «Matemàtica Moderna» encara podria tenir una certa presència en el nostre sistema educatiu, mentre que la resolució de problemes potser encara només hi té un petit protagonisme.

Ensenyar per resoldre problemes és el que s'ha fet durant molts anys i probablement sigui el que encara es fa en moltes aules. Normalment, quan es parla de resolució de problemes, en gran mesura podria ser això el que s'entén. Ensenyar a través de la resolució de problemes és del tot aconsellable per molts motius: es desenvolupa la capacitat de raonament de l'alumne, la seva motivació és molt més alta quan és ell qui contribueix a construir la teoria, es tracten problemes de la vida diària que el lliguen a la realitat del seu entorn, res s'aprèn millor que allò que un ha après per si mateix, i la participació de l'alumne en la construcció dels conceptes l'implica fomentant-ne la participació, l'expressió oral i el treball en grup.

Però, el professorat ho té prou en compte? La majoria del professorat hem après sota l'efecte de la «Matemàtica Moderna». El material aportat per les editorials ha estat la referència de molts docents, i aquest no compleix els aspectes necessaris perquè hi hagi un aprenentatge valuós. La influència de la «Matemàtica Moderna» en alguns casos, l'opció cap a la matemàtica bàsica en altres, i l'ensenyament parcial en resolució de problemes encarat cap a ensenyar per resoldre problemes, són tres eixos que justifiquen la intervenció d'aquest estil d'ensenyament i aprenentatge.

1.6 Què és resoldre un problema?

1.6.1 Què és un problema?

L'heurística té per objecte d'estudi les regles i mètodes de descobriment, indagació i invenció. Va ser iniciada per PÓLYA (1987) amb la publicació del llibre *How to solve it* l'any 1945 i que ha tingut moltes edicions i reimpressions posteriors. Però no va ser fins l'any 1961 i en el llibre *Mathematical Discovery* on va definir el significat d'aquest mot: *Tenir un problema significa buscar de manera conscient una acció apropiada per aconseguir un objectiu clarament concebut però no assolible de manera immediata* (PÓLYA, 1981, vol. I, pàg. 117).

Altres autors han definit també què entenien per problema. Totes aquestes definicions ens condueixen a considerar, i acceptar per aquest estudi, que un problema ha de complir les tres condicions següents:

1. Acceptació

   La persona o grup ha d'acceptar el problema i ha d'establir un compromís formal que pot tenir diverses motivacions.

2. Bloqueig

   Els intents inicials no donen bon resultat, les tècniques habituals per tractar el problema no funcionen.

3. Exploració

   Es requereix l'exploració del problema amb nous mètodes.

1.6.2 Exercicis *versus* problemes

Un problema té les fases exposades anteriorment, però un exercici, no. Un exercici no té una fase de bloqueig i no requereix l'exploració de nous mètodes. Per resoldre un exercici, s'aplica un procediment rutinari que condueix a la resposta. Així, el que per a alguns és un problema, per falta de coneixements específics, per als que sí que els tenen és un exercici. Fer exercicis té la seva importància en l'aprenentatge de la matemàtica, ja que ens ajuda a consolidar conceptes, propietats, procediments... els quals podrem aplicar quan vulguem resoldre problemes. Resoldre un problema requereix una reflexió i pot portar a l'execució d'accions originals que l'alumne no havia aplicat abans. Aquesta creativitat en la resolució distingeix un problema d'un exercici. Cal ser prudent, però, i aclarir, tal com hem dit, que aquesta distinció no és absoluta; depèn en gran mesura del bagatge intel·lectual de la persona que pretén resoldre l'exercici o problema. Aquí entra en joc de manera ineludible l'atenció a la diversitat. Quan volem proposar problemes hem de saber graduar-los correctament per tal que hi hagi un aprenentatge significatiu.

1.6.3 La dificultat en resolució de problemes

El procés de resolució d'un problema no és en general un procés que es pugui desenvolupar pas a pas segons unes regles establertes, això normalment passa en la resolució d'exercicis. Però, per què és tan difícil per a tanta gent resoldre problemes de matemàtiques?

Els treballs de Schoenfeld (en la bibliografia es fa referència a alguns d'ells) responen a la cerca d'explicacions sobre la conducta dels qui han de resoldre problemes. Aquest treball és fonamental per situar la resolució de problemes en el just punt que permeti adequar-la a la realitat educativa de l'alumne. Es desgranaran aquests resultats per tal de facilitar que la resolució de problemes arribi, a través de professors i editorials, als alumnes de secundària. L'anàlisi del comportament del qui resol problemes es pot classificar segons els següents components, atenent al seu coneixement i la seva capacitat:

1. Recursos cognitius

   Conjunt de fets i procediments coneguts per qui resol el problema.

2. Heurístics

   Regles per progressar en situacions de dificultat.

3. Control

   Aprofitament dels recursos disponibles.

4. Sistema de creences

   Perspectiva del resolutor respecte de la matemàtica i de com acostuma a treballar-hi.

El domini i facilitat en cadascun d'aquests components permet establir la dificultat de qui resol un problema. Pot tenir els recursos cognitius adequats i fins i tot l'heurística, però una manca de control no li permet saber com fer-ne ús. Una anàlisi profunda d'aquests components és necessària si volem situar els problemes en el punt de desenvolupament cognitiu adequat de l'alumne, i també si volem entendre les seves dificultats. Caldria apropar aquests resultats al professorat de secundària.

1.6.4 Un estudi de l'heurística

Les heurístiques permeten indagar o descobrir la solució d'un problema a través de mètodes no habituals. Hi ha una àmplia quantitat d'heurístiques que permeten diferents maneres d'abordar un problema. Es proposa analitzar diferents heurístiques tot donant-ne pautes d'aplicació a l'ensenyament secundari que permetin a professorat i editorials tenir referències per a la seva aplicació. Les heurístiques incrementen molt la motivació de l'alumne ja que li permeten triar el camí i mirar de crear la seva pròpia resolució[9].

Així, buscar un problema relacionat, considerar un cas particular, dividir el problema en parts, resoldre un problema similar més senzill, buscar regularitats, variar les condicions del problema..., són heurístiques que haurien de tenir un paper protagonista en l'ensenyament secundari i que ara per ara potser formen part de l'opció d'alguns professors, i un dels motius pels quals això passa és perquè encara que es resolguin molts exercicis, potser es resolen pocs problemes. I es resolen pocs problemes perquè manquen heurístiques...

1.6.5 Aprendre a actuar en situacions difícils

Cal que els nostres alumnes disposin d'estratègies que els permetin actuar i, per tant, no cedir fàcilment davant el fracàs inicial en la resolució d'un problema.

Aquestes decisions en la resolució de problemes han d'aparèixer en l'ensenyament secundari obligatori, atès que són equivalents a decisions de gestió en els negocis o també a decisions de tàctica o estratègia que es trobaran aviat en el món formatiu i laboral. Així, aquest aprenentatge que enfoquem dins de l'àrea de les matemàtiques tindrà també conseqüències en altres àrees de coneixement.

Cal introduir una manera de fer a les aules que es pot resumir dient que l'alumne s'ha de saber fer preguntes i el professor i els llibres de text són els que l'han guiar[10] perquè se les faci: *Què estic fent?*, *Per què ho faig?*, *Amb quina finalitat ho faig?*, *Si ho aconsegueixo, com ho faré servir després?*, etc.

Hi ha també altres factors que intervenen en la presa correcta de decisions en la resolució de problemes: inflexibilitat a l'hora de considerar alternatives, rigidesa en l'execució de procediments, manca de previsió de les conseqüències d'una certa acció, efecte *túnel* (manca d'avaluació del que s'està fent), etc.

[9]Tal com observa agudament Rey Pastor, no és la *possessió* de bens, en aquest cas culturals, sinó la seva *adquisició*, el que atorga a l'home les majors satisfaccions (PUIG ADAM, 1960, pàg. 104).

[10]Ensenyar bé ja no és transmetre bé, sinó guiar hàbilment l'alumne en el seu procés d'aprenentatge (PUIG ADAM, 1960, pàg. 116).

1.7 L'activitat docent i la resolució de problemes

1.7.1 S'aprèn a resoldre problemes resolent problemes?

L'afirmació *s'aprèn a resoldre problemes resolent problemes* s'ha sentit molt en els centres educatius. SWELLER i CHANDLER (1994) van fer una recerca els resultats de la qual no donaven suport a aquest punt de vista. Van veure que un alumne no es feia millor plantejador ni resolutor de problemes només plantejant i resolent problemes; hi ha d'haver una instrucció mínima. Si els alumnes no saben com desenvolupar un cert procediment, se'ls ha d'ajudar a fer-ho. Aquest resultat nega un constructivisme radical i ens porta a la reflexió que tot i que l'alumne ha de construir el seu propi coneixement, no ho ha de fer sol i el professor ha de ser el seu guia curricular. Així, la instrucció i la creació no han d'anar deslligades. Hi ha un mínim d'instrucció que és necessari per donar pas a la creació, sense perdre de vista que la instrucció ha de fonamentar la creativitat però mai substituir-la.

Per una altra banda, quan ens proposem resoldre problemes no rutinaris, no fem ús només dels coneixements relacionats amb els apresos, sinó que fem servir un ventall més ampli d'estratègies.

Molts educadors matemàtics s'han lamentat tot dient que hi ha massa professors que es conformen en instruir els seus estudiants. Opinen que el següent pas és proposar estratègies d'ensenyament en què els alumnes plantegin i resolguin problemes tot reflexionant sobre el que estan fent i el que han fet. Així, els professors han d'intentar ajudar els seus alumnes a plantejar i investigar una varietat de problemes aparentment similars, però que tinguin diferències estructurals que requereixin diverses estratègies. És important, però, que les activitats siguin tals que els alumnes no només puguin generar les seves pròpies estratègies en resolució de problemes, sinó que també sàpiguen comparar-les amb altres.

1.7.2 Centrar l'ensenyament en l'alumne o en els continguts?

BICKMORE-BRAND (1997) va realitzar una recerca sobre l'efecte de dues metodologies per ensenyar matemàtiques en la darrera etapa de primària. Una d'elles centra l'ensenyament en l'alumne i l'altra en els continguts. Mitjançant observacions molt detallades realitzades al llarg d'un any, es va posar de manifest que els alumnes de les dues classes van desenvolupar diferents percepcions no només de les matemàtiques que havien après sinó també del paper que poden jugar en les seves vides .

La resolució de problemes aconsegueix que sigui l'alumne qui construeixi els continguts amb la guia del professor i, per tant, esdevingui el centre d'atenció de l'activitat educativa i el màxim responsable de la construcció del seu propi coneixement.

Així, tot i que el criteri de demarcació de la matemàtica es limita a allò que es pot demostrar, l'activitat en educació matemàtica té un ventall molt més ampli. Prioritzar a l'educació secundària obligatòria tot allò que va més enllà d'aquest criteri de demarcació és fonamental si volem un ensenyament de qualitat. Els alumnes han d'aprendre a intuir, i per a això fa falta el raonament plausible que utilitzem en la nostra vida quotidiana.

1.7.3 L'activitat educativa a l'aula i el mètode de Pólya

En l'educació secundària obligatòria s'ha de valorar d'una manera especial el caràcter instrumental de la matemàtica. Així, no s'ha de prioritzar el potencial logicodeductiu i la capacitat d'abstracció formal. La resolució de problemes convida l'alumne a afrontar noves situacions, i no només aquelles que ja s'han tractat anteriorment. L'assoliment dels objectius es facilita reprenent els continguts estudiats o introduïts prèviament. La resolució d'un problema a l'aula requereix una flexibilitat per part del professor que li permeti canviar d'estratègia quan la que se seguia esdevé estèril.

La resolució de problemes dista molt de la formació que en gran mesura hem rebut el professorat d'ensenyament secundari a les universitats, on primaven el potencial logicodeductiu i la capacitat d'abstracció formal.

El mètode de quatre passos de Pólya així com altres mètodes, condueix al diàleg i, per tant, contribueix al desenvolupament i millora de les capacitats comprensives i expressives (orals i escrites) de les noies i els nois. L'estadística i el tractament de l'atzar, la geometria, la lectura i elaboració de gràfics, l'estudi dels nombres, el càlcul i la mesura, permeten un tractament creatiu de la resolució de problemes. L'exposició sistemàtica de continguts sobrepassa en molts casos la capacitat i l'interès d'uns alumnes, mentre que no és suficient per a uns altres. El mètode de Pólya permet el tractament de problemes a l'ensenyament primari que es tornen a tractar posteriorment al secundari, batxillerat i també en estudis superiors, permetent una atenció a la diversitat a l'aula que en ocasions és possible amb les mateixes activitats d'ensenyament-aprenentatge. Un mateix contingut es va reprenent amb graus de dificultat i generalització cada vegada creixents. Així es va assimilant de manera sòlida en el bagatge cognitiu de l'alumne.

Les unitats didàctiques disposen sovint d'exercicis d'aplicació que permeten consolidar els continguts tractats, però la resolució de problemes, no pas simples exercicis d'aplicació del que s'ha fet, és indispensable per assolir els objectius establerts. També cal dir que la resolució de problemes es dirigeix sovint a aspectes d'història de la matemàtica, no en el sentit d'anècdotes o curiositats, sinó com a eina perquè l'alumnat copsi la justificació essencial de l'activitat matemàtica. En la visió retrospectiva és on es pot anar més enllà per tal que l'alumne copsi la magnitud de la matemàtica i generi noves preguntes.

La resolució de problemes no és només un mètode d'ensenyament i aprenentatge. També és una actitud general, una disposició cap a la indagació, una aplicació de l'esperit crític que té com a finalitat el desenvolupament de noves idees basades en altres ja conegudes.

Tot això és possible si prèviament s'han dissenyat i elaborat activitats d'ensenyament i aprenentatge que, acompanyades de l'adequada activitat docent, permetin el correcte funcionament a l'aula i del desenvolupament curricular. Cal un detallat desenvolupament en exemples model interessants, adequats al currículum, ben temporitzats i que permetin que l'alumne desenvolupi les seves pròpies estratègies generant i expressant les solucions a la seva manera; no indicant inicialment preferències per una estratègia concreta.

1.7.4 Com cal ensenyar els alumnes?

Si els professors veuen la seva tasca com la transmissió d'un coneixement acabat aleshores s'acostumaran a fer exposició de continguts a la seva classe. Si es vol, l'ensenyament està ple de definicions, resultats i procediments algorísmics. Aquesta manera d'ensenyar matemàtiques s'anomena mecanicisme (pàg. 12).

En canvi, si considerem que el coneixement matemàtic no està totalment acabat, sinó que està en creació constant, és a dir, que els continguts que aprenem es poden ampliar i enriquir al llarg de la vida, aleshores l'exposició és insuficient, i caldrà que els alumnes participin en l'aprenentatge. Hauríem d'ensenyar a pensar als alumnes? Si ho acceptem, perquè sigui possible cal que aquests participin de la construcció del seu propi coneixement. Potser hauríem de mirar que els alumnes descobrissin els punts més interessants de la matemàtica per tal que no interpretessin aquesta disciplina com a reservada pels més avantatjats.

Aquestes dues maneres de procedir plantegen diverses preguntes que no es poden deixar de banda si volem que la resolució de problemes s'apliqui correctament a les aules: Què i com aprenen els alumnes? Com ensenyem i com cal fer-ho?

La normativa diu que la resolució de problemes ha d'amarar tot el currículum, però la correcta aplicació és difícil, i les avaluacions ens donen resultats molt millorables. En aquesta recerca s'accepten les idees de Pólya respecte de com cal ensenyar:

Un professor de matemàtiques té una gran oportunitat. Si dedica el seu temps a exercitar els alumnes en operacions rutinàries, matarà en ells l'interès, n'impedirà el desenvolupament intel·lectual i acabarà desaprofitant la seva oportunitat. En canvi, si els posa a prova la curiositat plantejant-los problemes adequats als seus coneixements, i els ajuda a resoldre'ls a través de preguntes estimul·lants, podrà despertar en ells el gust pel pensament independent i proporcionar-los certs recursos per aconseguir-ho. (PÓLYA, 1987, pàg. 5).

1.8 L'avaluació

Si entenem que l'avaluació té com una de les seves finalitats comprovar el nivell d'assoliment dels objectius establerts prèviament, aleshores fa falta recollir aquesta informació.

Quan no és el professor qui avalua els seus alumnes sinó que és un departament didàctic o una institució aleshores el procés d'avaluació s'aparta amb facilitat de la seva vessant formativa. Això fa que el professor excessivament preocupat pel seu percentatge d'èxits en els exàmens (principalment els externs: Competències Bàsiques, PAU, etc), deixi en segon lloc els objectius principals de l'educació i se centri en els propis dels exàmens. L'educació i la preparació no s'haurien, per tant, allunyar massa l'una de l'altra.

La resolució de problemes condueix a la creativitat de l'alumne i és, per tant, difícil recollir tota la informació necessària que ens permeti copsar el desenvolupament educatiu d'aquest si no disposem d'instruments d'avaluació especialment pensats per a aquest estil d'ensenyament-aprenentatge.

Les activitats de plantejament i resolució de problemes fan que els alumnes reflexionin sobre les seves estratègies i considerin la qualitat d'aquestes des d'una perspectiva global. Així, qualsevol avaluació basada exclusivament en exàmens escrits amb resposta curta és improbable que reculli aquesta informació. Les qüestions acostumen a ser concretes i difícilment generen reflexió sobre aspectes com l'eficàcia o l'elegància de les estratègies.

Els instruments d'avaluació, han de permetre diagnosticar el procés d'aprenentatge de l'alumne i alhora promoure la seva reflexió. La resolució de problemes indueix l'alumne a buscar respostes des dels seus propis esquemes mentals, i els instruments d'avaluació ho han de mesurar i facilitar.

Capítol 2

George Pólya

Índex

La resolució de problemes com a eina bàsica del quefer matemàtic ha esdevingut quelcom molt important en l'activitat investigadora del segle XX. Aquesta aproximació a la matemàtica ha estat un fet i ara hauríem d'aprendre, tots nosaltres, a insertar-la en la nostra docència.

2.1 El mètode dels quatre passos

En el llibre *Cómo plantear y resolver problemas* PÓLYA (1987, pàg. 19) s'exposa una llista de cadascun dels passos que de manera orientativa pot ajudar a resoldre un problema. Aquesta llista interpretada per sí sola no ens aportarà tota la profunditat que Pólya li vol donar. Posteriorment s'exposarà i exemplificarà cadascun dels apartats.

Per resoldre un problema cal:

I - COMPRENSIÓ EL PROBLEMA

- Quina és la incògnita? Quines són les dades?

- Quines són les condicions? Són suficients per determinar la incògnita? Són insuficients? Són redundants? Són contradictòries?

- Fes un dibuix. Simbolitza el problema de forma adient.

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

- T'has trobat amb un problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual?

- Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la incògnita i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant.

- Aquí tens un problema relacionat amb el teu i ja resolt. Pots utilitzar-lo? Pots utilitzar el seu resultat? Podries utilitzar el mateix mètode? Hauries d'introduir algun altre element que et permetés utilitzar aquest mètode?

- Pots enunciar el problema d'una altra forma? Pots plantejar-lo de nou d'una manera diferent?

- Si no pots resoldre el problema proposat, intenta resoldre primer algun problema semblant. Pots imaginar un problema anàleg que et sigui més fàcil? Un problema més general? Un cas particular? Un problema anàleg? Pots resoldre una part del problema? Considera una part de les condicions, descarta la resta; la incògnita, ara, és més fàcil de determinar?, com pot variar? Pots deduir de les dades algun element d'utilitat? Pots pensar en algunes altres dades que et permetin determinar la incògnita? Pots canviar la incògnita? Pots canviar la incògnita o les dades, o totes dues si és precís, de manera que la nova incògnita i les noves dades siguin més fàcils de relacionar?

- Has utilitzat totes les dades? Has utilitzat totes les condicions? Has tingut en compte tots el coneixements que fan referència al problema?

III - EXECUCIÓ DEL PLA

- Mentre portes a terme el pla per trobar la solució, comprova cada un dels passos.

- Pots veure que el pas és correcte. Pots demostrar-lo?

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

- Pots verificar la solució obtinguda? Pots verificar el raonament utilitzat?
- Pots obtenir el resultat de diferent forma? Pots veure'l d'un cop d'ull? Pots utilitzar el resultat o el mètode en algun altre problema?

2.1.1 Construcció d'un concepte.

Per tal d'exemplificar el mètode dels quatre passos de Pólya consideraré un problema que em portarà a d'altres que ens conduiran a la construcció d'un concepte: la suma del primers termes d'una progressió aritmètica. En funció del bagatge dels alumnes en el procés de resolució podrà haver-hi diferents camins, però qualsevol d'ells ens encaminarà cap a la construcció d'aquest concepte.

Si es pretén atendre la diversitat de l'alumnat des d'un punt de vista constructivista hauríem de conduir la classe per camins raonables i adequats al sentit comú. Aquests camins no haurien de treure la possibilitat de que alguns dels nostres alumnes descobrissin per ells mateixos camins *genials*.

La suma dels primers termes d'una progressió aritmètica pot ser exposada, instruïda o construïda de diverses maneres. A continuació en veurem una que presenta diferents opcions fent que el que és plausible no eviti el que és genial.

Imaginem una classe que està familiaritzada amb les progressions aritmètiques però que desconeix l'existència d'una fórmula que permeti calcular la suma dels seus primers termes.

Problema 2.1.1 *Calcula la suma dels nombres senars de l'1 al 1000, és a dir, calcula:*

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 999$$

Per tal de comprendre el problema cal que els alumnes disposin de temps suficient. Si no han resolt aquest problema prèviament aleshores no disposen d'un algorisme directe. Si disposessin d'un algorisme de resolució probablement alguns d'ells haurien començat a escriure posant en pràctica el que ja saben mentre que els que desconeguessin l'algorisme haurien quedat aturats davant la possibilitat de no poder fer res. Però aquest és un problema que no pretén que s'hi apliqui un algorisme, per tant, no cometrem la greu negligència de donar-los cap mena de fórmula, seran ells que la construiran. S'opta per aquest problema com a primer exemple ja que permet diferents possibilitats de resolució i exemplifica amb molta claredat el mètode dels quatre passos de Pólya. Iniciem el diàleg:

I - COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA

Quina és la incògnita? Probablement alguns alumnes siguin prudents però no trigaran massa a fer-se càrrec del que cerquem. També s'adonaran que el càlcul directe és llarg tot i que no és gens descartable que algun d'ells ho calculi. El diàleg amb el grup classe és essencial i deixar el càlcul directe per casa, una bona opció.

I, quines són les dades? És esperable que no triguin massa a veure que disposem dels nombres senars des de l'1 fins al 1000.

Quines són les condicions? Doncs no hi ha condicions afegides que no exposi l'enunciat. L'alumne cada vegada està més familiaritzat amb el problema. Sap el que té i sap el que busca però li falta establir un pla. Abans però examinem encara amb més detall l'enunciat.

Les condicions són suficients per determinar la suma? Són insuficients? Són redundants? Són contradictòries? Aquestes preguntes permetran posar l'alumne al màxim extrem de comprensió de l'enunciat. Els alumnes entenen que amb molta paciència poden calcular aquesta suma, per tant, les condicions són suficients. També entenen que si fan la suma directament el resultat serà únic i en conclusió no hi ha condicions redundants ni contradictòries.

Arribat aquest punt val la pena demanar als alumnes que mirin de fer un dibuix adient del problema. Segurament no els serà fàcil... Si arriben a fer una representació visual tindran molt de guanyat.

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

El diàleg conduirà l'alumne a establir un pla i diverses preguntes ens ajudaran a dirigir-lo: t'has trobat abans amb algun problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual?, coneixes alguna propietat que et pugui ser útil? ... Probablement l'alumne no reconegui cap problema semblant ja que de sumes n'ha fet moltes però no de *tant llargues*...

Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la suma que et demanen i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant. Donat que estem treballant amb sumes *llargues* difícilment tinguem intervencions sobre problemes previs relacionats. Podem insistir amb més preguntes: pots enunciar el problema d'una manera diferent?, pots plantejar-lo d'una altra manera?, ...

Aquesta situació convida la genialitat de l'alumne. Si algun d'ells pensés en sumar invertint l'ordre, aleshores obtindria un mètode de resolució que denotaria una ment brillant[1].

L'alumne té, per tant, la possibilitat de crear un camí directe cap a la solució, però no trobar-lo no ens bloqueja la resolució del problema.

Si no pots resoldre el problema proposat, intenta resoldre primer algun problema semblant. Pots imaginar un problema anàleg que et sigui més fàcil? Un problema més general? Un cas particular? Pots resoldre una part del problema?

El treball a través de totes aquestes preguntes estableix un diàleg a l'aula que té gran interès pedagògic per sí sol. Caldrà entretenir-se en els casos particulars. Fem que l'alumne experimenti, fem que l'alumne conjecturi!

Donat que la suma $1+3+5+7+\cdots+995+997+999$ és molt llarga i se'ns fa massa difícil, mirem de calcular sumes més curtes:

$$\begin{gathered} 1 = 1 \\ 1+3 = 4 \\ 1+3+5 = 9 \\ 1+3+5+7 = 16 \\ 1+3+5+7+9 = 25 \\ 1+3+5+7+9+11 = 36 \\ \cdots \end{gathered}$$

observes algun patró?

Si no observa cap regularitat optem per suggerir una representació gràfica[2]. Probablement l'alumne opti per una que no l'apropi a veure que els resultats són els quadrats dels primers nombres (fig. 2.1, pàg. 26). Aquesta situació pot presentar més dificultats de les que en un principi podríem imaginar. Haurem de guiar l'alumne per tal que representi aquests valors en forma de quadrat.

[1] Johann Carl Friedrich **Gauss** quan tenia set anys va resoldre aquest problema a partir d'aquesta idea; Andrey Nikolaevich **Kolmogorov** als quatre. Per sumar els nombres senars de l'1 al 1000 va optar per escriure la suma dues vegades però posant el segon sumand amb l'ordre invertit. Sumant ambdues expressions terme a terme va obtenir el doble del resultat desitjat.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \cdots & + & 995 & + & 997 & + & 999 \\ + & 999 & + & 997 & + & 995 & + & \cdots & + & 5 & + & 3 & + & 1 \\ \hline & 1000 & + & 1000 & + & 1000 & + & \cdots & + & 1000 & + & 1000 & + & 1000 \end{array}$$

així, sumem 500 vegades el nombre 1000 obtenint 500000. Però com que hem sumat dues vegades l'expressió, el resultat és 250000

[2] Que l'alumne no opti per representar els resultats gràficament constata una deficiència en el treball empíric previ. Si la humanitat va realitzar els seus primers recomptes amb pedres o altres objectes, també hauria de ser desitjable que la formació primària familiaritzés els alumnes amb aquestes tècniques de recompte.

Figura 2.1: Possible representació gràfica dels resultats.

Podem identificar l'1 amb un punt, el 4 amb quadre punts, el 9 amb nou punts, etc., tots ells amb la forma geomètrica de quadrat, atenent al fet que aquests nombres són precisament els quadrats dels primers nombres naturals.

Figura 2.2: Considerem el primer terme de la suma.

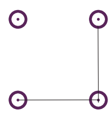

Figura 2.3: Considerem la suma dels dos primers termes.

Què obtenim?

L'alumne observarà que els resultats són nombres quadrats. La seva representació ens permet veure que $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, ...

Deixem que conjecturin el resultat de la suma $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 995 + 997 + 999$. Hem establert un pla de treball.

III - EXECUCIÓ DEL PLA

Sabem que la suma dels nombres senars consecutius a partir de l'1 ens va donant com a resultat nombres quadrats. Si sumem només el primer senar obtenim 1^2, si en sumem dos obtenim $1 + 3 = 2^2$, si en sumem tres $1 + 3 + 5 = 3^2$, si en sumem quatre $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, ... Si sabéssim quants sumands té l'expressió $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 995 + 997 + 999$ podríem saber quin és el resultat.

Ara bé, per cada nombre parell hi ha un nombre senar, per tant, de l'1 al 1000 hi ha meitat de parells i meitat de senars, és a dir, 500 de cada. Com a conclusió tenim que $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 995 + 997 + 999 = 500^2$

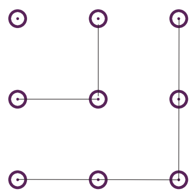

Figura 2.4: Considerem la suma dels tres primers termes.

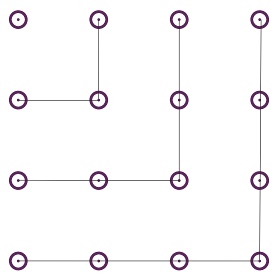

Figura 2.5: Considerem la suma dels quatre primers termes.

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

Pots verificar la solució obtinguda? L'alumne està força habituat a l'ús de l'ordinador i podrà verificar-la fent servir un full de càlcul. Aquesta possibilitat permet fer ús de les Tecnologies de la Informació i de la Comunicació de forma justificada[3]. Cal destacar que ens ha fet falta conèixer la quantitat de termes que volem sumar, és a dir 500.

Pots obtenir el resultat de forma diferent? Pots veure'l d'un cop d'ull? Si fins aquest moment no ha sortit la idea utilitzada per Gauss i exposada anteriorment (pàg. 25) aleshores és un bon moment per mostrar-la.

Pots utilitzar el resultat o el mètode en un altre problema?

Si volem sumar els nombres parells de l'1 al 1000, és a dir, volem calcular la suma $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 998 + 1000$, podem utilitzar el resultat que hem obtingut?

Deixem que els alumnes experimentin. Probablement donin algunes voltes abans de veure que cada sumand d'aquesta nova suma és una unitat superior a cada sumand de l'anterior.

Problema 2.1.2 *Calcula la suma dels nombres parells de l'1 al 1000, és a dir, calcula:*

[3]Les Tecnologies de la Informació i de la Comunicació (TIC) prenen el seu màxim sentit quan la construcció del coneixement necessita d'elles. Que l'alumne estigui a gust davant de l'ordinador no és motiu suficient que justifiqui el seu ús.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1000$$

podem fer servir els resultats:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 999 = 500^2$$
$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 500$$

ja que

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 1000 = (1 + 1) + (3 + 1) + (5 + 1) + \cdots + (999 + 1) = (1 + 3 + 5 + \cdots + 999) + (1 + 1 + 1 + \cdots + 1) = 500^2 + 500$$

En arribar a aquest punt reiterem de nou la pregunta.

Pots utilitzar el resultat o el mètode en un altre problema? I si ens proposem sumar tots els nombres enters de l'1 al 1000?

Deixem-los temps també perquè ho pensin, suggerim però no forcem. La suma dels parells de l'1 al 1000 més la dels senars de l'1 al 1000 és la suma de tots els nombres enters de l'1 al 1000.

Problema 2.1.3 *Calcula la suma dels nombres enters de l'1 al 1000, és a dir, calcula:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 997 + 998 + 999 + 1000$$

Per sumar els nombres de l'1 al 1000 sumarem els resultats corresponents de sumar els nombres senars de l'1 al 1000 i els nombres parells de l'1 al 1000.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + 997 + 998 + 999 + 1000 = (1 + 3 + 5 + \cdots + 999) + (2 + 4 + 6 + \cdots + 998 + 1000) = (500^2) + (500^2 + 500) = 500500$$

L'alumne ha vist com calcular sumes llargues i potser abans d'arribar a una expressió més general val la pena que exerciti[4] el que ha après. Així, pot calcular sumes dels primers termes de progressions aritmètiques fent servir les estratègies exposades. Això serà la resolució d'exercicis que permetrà solidificar les tècniques exposades, preparant el terreny abans de cercar una expressió general per la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica.

I de nou reiterem la pregunta. Pots utilitzar el resultat o el mètode en un altre problema? De fet estem traient un gran resultat pedagògic de la visió retrospectiva generant problemes cada vegada més amplis. Podem calcular la suma dels primers nombres naturals des de l'1 fins a un de determinat? De fet amb aquest plantejament hem fet un salt en no fixar el darrer terme. Estem mirant de *generalitzar* el resultat.

[4] Aquí entren en joc els exercicis. Es pot apreciar la gran diferència entre un exercici i un problema en un cas concret.

Problema 2.1.4 *Calcula la suma dels nombres enters de l'1 fins a* $(n-1)$*, és a dir, calcula:*

$$1+2+3+4+5+\cdots+(n-2)+(n-1)$$

Podem separar aquesta suma en dues, una de nombres parells i una altra de nombres senars. Fet això podrem aplicar les estratègies apreses pel càlcul d'aquestes sumes. Probablement alguns alumnes no reflexionin prèviament sobre la quantitat de nombres senars i parells que hi ha en la suma en funció de la paritat de $(n-1)$. Caldrà per tant guiar-los sense evitar però que siguin ells mateixos els qui, sota les nostres indicacions, vegin la necessitat de discernir els dos casos següents:

1. Suposem que $(n-1)$ és parell

   En aquest cas la suma demanada està formada per $\frac{n-1}{2}$ nombres parells i $\frac{n-1}{2}$ nombres senars. Els nombres senars sumen $(\frac{n-1}{2})^2$ i els nombres parells sumen $(\frac{n-1}{2})^2+\frac{n-1}{2}$. La suma de tots ells ens donarà el resultat buscat:

   $$(\tfrac{n-1}{2})^2+(\tfrac{n-1}{2})^2+\tfrac{n-1}{2}=\tfrac{n^2-n}{2}=\tfrac{n(n-1)}{2}$$

2. Suposem que $(n-1)$ és senar

   En aquest cas la suma demanada està formada per $\frac{n}{2}$ nombres senars i $\frac{n-2}{2}$ nombres parells. Els nombres senars sumen $(\frac{n}{2})^2$ i els nombres parells sumen $(\frac{n-2}{2})^2+\frac{n-2}{2}$. La suma de tots ells ens donarà el resultat buscat:

   $$(\tfrac{n}{2})^2+(\tfrac{n-2}{2})^2+\tfrac{n-2}{2}=\tfrac{n^2-n}{2}=\tfrac{n(n-1)}{2}$$

Tant en el cas parell com en el senar obtenim el mateix resultat. A més, donat que anteriorment hem familiaritzat l'alumne amb l'estratègia que va fer servir Gauss (pàg. 25) podem mirar de suggerir-li aquest enfoc:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-3) & + & (n-2) & + & (n-1) \\
+ & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & n & + & n & + & n & + & \cdots & + & n & + & n & + & n
\end{array}$$

Sumant dues vegades l'expressió que ens proposem calcular obtenim $n(n-1)$ i, per tant, el resultat buscat és $\frac{n(n-1)}{2}$.

Arribat a aquest punt de generalitat és bo que l'alumne exerciti aquest tipus d'activitat amb altres sumes que li requereixin nivells d'abstracció similars: buscar una expressió que determini la suma dels nombres des de 1000 fins a n, calcular la suma dels múltiples de set des d'un nombre fins un altre, etc.

Hem llaurat el terreny i estem preparats per cercar una expressió que permeti calcular la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica.

Problema 2.1.5 *Calcula la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica*

Considerem una progressió aritmètica que té primer terme a_1 i diferència d:

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d, \cdots,\ a_1 + (n-1)d$$

ens proposem calcular la suma dels seus termes, des del primer fins el que ocupa el lloc enèsim, és a dir:

$$\begin{gathered} S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d) = \\ na_1 + (d + 2d + 3d + \cdots + (n-1)d = \\ na_1 + d(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) = \\ na_1 + d\frac{n^2 - n}{2} = \\ (a_1 + d\frac{n-1}{2})n = \\ \frac{a_1 + (a_1 + d(n-1))}{2}n = \frac{a_1 + a_n}{2}n \end{gathered}$$

La resolució d'aquest problema ens ha conduit a la construcció d'una fórmula, sense genialitats però integrant-les si apareixen.

S'exposa aquest problema en aquest punt ja que exemplifica molt correctament el mètode de quatre passos de Pólya. Tot i així i des del punt de vista que es tracta d'un problema que genera una fórmula, hauria de formar part del capítol que fa referència a la construcció de fórmules i algorismes (pàg. 117).

2.1.2 La successió de Fibonacci

Per tal d'exemplificar de nou el mètode dels quatre passos de Pólya prendré un famós problema que va escriure Leonardo Pisano (més conegut per Fibonacci) l'any 1202 en el llibre *Liber Abaci* FIBONACCI (2002).

Problema 2.1.6 *Un home va posar un parell de conills en una gàbia. Els conills no van tenir descendència en el primer mes però cadascun dels mesos posteriors van tenir un nou parell de conills. Si cada nou parell es reprodueix d'aquesta manera, quants parells de conills hi haurà al cap d'un any?*

Per tal de comprendre el problema cal deixar que els alumnes experimentin per veure com evoluciona el problema al llarg dels tres o quatre primers mesos. Si els alumnes no han resolt aquest problema prèviament aleshores no disposen d'un algorisme directe. Si disposessin d'un algorisme de resolució probablement alguns d'ells haurien començat a escriure posant en pràctica el que ja saben mentre que els que desconeguessin l'algorisme haurien quedat bloquejats.

Iniciem el diàleg amb el grup classe:

I - COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA

Quina és la incògnita? és a dir, què busquem? Probablement alguns alumnes requereixin remirar de nou l'enunciat, és positiu. No trigaran massa a veure que busquem la quantitat de parells de conills que hi haurà al final de l'any. Per tant, mirarem de trobar parells de conills, no conills individuals sinó parells d'ells.

I, quines són les dades? És esperable que no triguin massa a veure que disposem d'un parell de conills que es reprodueix d'una determinada manera. De quina?

Quines són les condicions? Doncs que el primer mes no es reprodueixen (són massa joves) i que la resta de mesos cada parell de conills en produeix una altre. L'alumne cada vegada està més familiaritzat amb el problema.

Les condicions són suficients per determinar la incògnita? Són insuficients? Són redundants? Són contradictòries? Aquestes preguntes permetran introduir l'alumne al màxim extrem de comprensió de l'enunciat. Si a partir del segon mes cada parell en produeix un altre aleshores passats els mesos d'un any hi haurà una certa quantitat de parells, que ara desconec i que vull conèixer, però el que si que està clar és que hi haurà una certa quantitat de parells de conills. També està clar que els parells que es produiran depenen de la quantitat que hi hagi el mes immediatment anterior. Les condicions són clares i suficients per abordar el problema.

Arribat aquest punt val la pena demanar als alumnes que intentin fer un dibuix o una representació adient del problema. Segurament no els serà fàcil... Probablement caldrà guiar-los per tal d'aconseguir-ho. Què tenim? Un procés que s'efectua al llarg de dotze mesos. Cada més té un nombre inicial de parells de conills, una quantitat de parells produïts i, per tant, una quantitat final de parells de conills serà la quantitat inicial del més següent. Aquestes orientacions donades poc a poc i mirant que siguin els alumnes qui les descobreixin conduiran a una taula com aquesta (taula 2.1, pàg. 32):

Amb facilitat aquesta taula ajudarà a concebre un pla. Continuació del diàleg...

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

T'has trobat amb un problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual? En cas afirmatiu d'algun alumne cal donar-li la paraula, participació a l'aula en un problema creatiu. Probablement no passarà en els primers problemes però mica en mica l'alumne agafarà confiança i mostrarà les seves idees. Probablement l'alumne no reconegui cap problema semblant.

Mes	Quantitat de parells de conills a l'inici	Quantitat de parells de conills produïts	Quantitat de parells de conills al final
1r			
2n			
3r			
4t			
5è			
6è			
7è			
8è			
9è			
10è			
11è			
12è			

Taula 2.1: Exemple de taula que pot arribar a fer l'alumne per tal de recollir els resultats de la seva experimentació.

Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la incògnita i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant.

Les diferents preguntes de la concepció del pla ens ajudaran molt en altres problemes però en aquest és fàcil que algun alumne ens interrompi: Disposem d'una taula que si podem arribar a completar tindrem la quantitat final de parells de conills al cap de dotze mesos...

Això és el millor que pot passar!!! Cal fer un gest de reconeixement a l'alumne. Mirem doncs de complimentar la taula.

III - EXECUCIÓ DEL PLA

Podrem veure quants parells de conills hi ha el cinquè mes sense saber quants n'hi ha el quart? Deixem que responguin. No tots els alumnes són igual de ràpids, i no l'alumne més ràpid és el que pot arribar més lluny. Facilitem que l'alumne amb més dificultats sigui el que respongui. Generant el diàleg adequat i deixant el temps suficient tots veuran que hem de començar pel primer més i que amb el resultat del primer mes podrem fer el segon; amb el resultat del segon podrem fer el tercer...

A l'inici del primer mes només hi ha un parell de conills, tal com diu l'enunciat del problema, i no se'n produeix cap. Finalitza el primer més, per tant, amb un parell. Aquest patró continua a través de tota la taula. Hem après a comptar. Deixeu-los comptar.

Mes	Quantitat de parells de conills a l'inici	Quantitat de parells de conills produïts	Quantitat de parells de conills al final
1r	1	0	1
2n	1	1	2
3r	2	1	3
4t	3	2	5
5è	5	3	8
6è	8	5	13
7è	13	8	21
8è	21	13	34
9è	34	21	55
10è	55	34	89
11è	89	55	144
12è	144	89	233

Taula 2.2: Recull de resultats en la taula proposada prèviament. La primera columna de dades conté la successió de Fibonnaci.

Per tant, hi haurà 233 parells de conills al cap de l'any. Probablement molts alumnes donaran el problema per finalitzat. Si els preguntem si podem donar per acabat el problema probablement alguns d'ells optaran per verificar l'aritmètica que és una condició necessària però no suficient. També poden optar per rellegir l'enunciat i veure si contestem al que ens demanen. Els demanarem que redactin les seves conclusions. Però els destacarem que tot això forma part de la darrera part del problema.

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

Pots verificar la solució obtinguda? L'alumne segurament dirà que ha revisat els càlculs i que són correctes.

Pots verificar el raonament utilitzat? L'alumne haurà revisat l'enunciat i mirarà si el problema està ben plantejat.

Pots obtenir el resultat de diferent forma? L'alumne es pot estranyar en un primer moment d'aquesta petició tot expressant que ja l'ha resolt d'una manera, per què en vol una altra? Si poguéssim resoldre el problema d'una altra manera la nostra visió d'ell seria molt més àmplia.

Pots veure'l d'un cop d'ull? Seguint el problema s'arriba a la solució però de cop no es veu. Seria bo expressar que quan un problema està molt ben treballat i s'entén des de diferents punts de vista, aleshores es pot veure d'un cop d'ull.

Pots utilitzar el resultat o el mètode en algun altre problema? Probablement en un primer moment dirà que no ho sap. Potser ha arribat el moment de posar nom als nombres de la primera columna. Sortiran en altres problemes, en molts altres problemes. Els nombres que surten a la primera columna no s'acaben mai, són una successió de nombres: 1, 1, 2, 3, 5, 80, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... i hom l'anomena successió de Fibonacci.

Així com en el primer exemple hem construït un apartat teòric, la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica, en aquest hem sembrat el necessari perquè posteriorment els alumnes construeixin una expressió compacta (terme general[5]) de la successió de Fibonacci.

2.1.3 Visió retrospectiva

Un article[6] publicat per Krulik i Rudnick (1994, pàgs. 334-338) examina detalladament l'etapa final del pla de treball de Pólya, la visió retrospectiva. L'estudi parteix del convenciment dels autors de que un esforç especial en aquesta darrera etapa millora el que ells anomenen habilitats avançades de pensament.

Exposen que per molta gent aquesta darrera etapa consisteix en examinar la resposta, determinar si és matemàticament correcta, veure si té sentit i comprovar si s'adequa a la pregunta. De fet insisteixen en que tots aquests aspectes són necessaris, però no suficients.

Cal però dedicar temps a aquesta fase, al desenvolupament del pensament crític i creatiu de l'alumne i a la millora de la seva autoavaluació. Estableixen cinc etapes sobre la visió retrospectiva de Pólya:

1. *Comprovar que la resposta és possible i raonable*

   Una vegada feta la correcció matemàtica de la resposta, cal veure si és raonable a la pràctica i que té sentit: que el resultat sigui enter si l'enunciat així ho demana, que les unitats són les adequades, ...

2. *Escriure un resum sobre el problema i la seva solució*

[5]Amb aquest exemple l'alumne ha experimentat la successió de Fibonacci. No hauria de succeir que alumne afrontés un curs d'àlgebra lineal sense estar familiaritzat amb aquesta successió. En aquest el treball amb diagonalització d'endomorfismes permet obtenir el terme general d'aquesta.

[6]Aquest article està publicat en la revista «Arithmetic Teacher» que actualment es diu «Teaching Children Mathematics». És una font de recursos materials que permeten aproximar pares, alumnes i professors des de l'òptica de l'ensenyament.

El resum força els alumnes a examinar els seus mètodes de pensament des del començament del procés i clarifica les idees. Temps després els alumnes podran revisar com van atacar el problema. A més, el resum permet al professor examinar els processos de pensament de l'alumne. Aquesta informació ha de formar part del procés d'avaluació. Mentre que hi ha professors que recomanen que els alumnes vagin escrivint les seves idees mentre resolen els problemes, en aquest estudi els autors opten per fer un resum final ja que no es talla el procés creatiu de l'alumne al llarg del problema i al final se'ls fa considerar la totalitat del mateix.

3. *Cercar altres solucions*

   En aquest tercer apartat els autors defensen que per aconseguir pensament creatiu, cal demanar als alumnes que hagin resolt un problema que ho intentin de manera totalment diferent, sense canviar les condicions del problema. Però, què s'aconsegueix generant diferents maneres de resoldre un mateix problema? (en lloc de resoldre d'una sola manera diferents problemes) Treballar l'anàlisi i la comprensió tot potenciant el pensament creatiu dels alumnes. Caldria també el temps suficient per tal que compartissin a l'aula les seves experiències amb els seus companys, tot afavorint les habilitats de comunicació entre ells.

   Amb la finalitat d'exemplificar aquest apartat faré ús d'un problema que ha aparegut a nombroses publicacions però que també apareix sovint als centres de secundària.

Problema 2.1.7 *Un granger demana al seu fill i a la seva filla que vagin a l'estable a comptar la quantitat de pollastres i de porcs que hi ha. Quan tornen el fill diu que ha contat 200 potes i la filla diu que ha contat 70 caps. Quants pollastres i quants porcs hi ha a la granja?*

Aquest problema i altres similars apareixen sovint com a exercici d'aplicació de sistemes d'equacions lineals de dues equacions amb dues incògnites. És una llàstima que sigui així, si és que apareix en aquest context per primera vegada, ja que tractat així l'exercici no és gens creatiu. Veurem a continuació cinc possibles resolucions. La primera és la que sovint he pogut constatar a l'ensenyament secundari obligatori. Tot i així, potser hauria de ser la darrera a utilitzar-se ja que aquesta requereix l'aplicació d'un algorisme mentre que les altres requereixen molta més creativitat per part de l'alumne. Els problemes que exposo a continuació es presenten de manera esquemàtica i cal entendre que la seva resolució a l'aula hauria de seguir les estratègies exposades pel mètode dels quatre passos de Pólya.

(a) *1r mètode*

Pels alumnes familiaritzats amb la resolució de sistemes d'equacions lineals de dues equacions amb dues incògnites. Representant per x la quantitat de porcs i per y la quantitat de pollastres obtenim les equacions següents:

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & + \; y & = & 70 \\ 4x & + \; 2y & = & 200 \end{array}\right.$$

Resolent obtenim que a l'estable hi ha 30 porcs i 40 pollastres.

(b) *2n mètode*

El problema es pot resoldre per assaig i error. Treballant segons el mètode de Pólya es pot establir un pla segons el qual recollirem en una taula els diferents intents. Ens podrem equivocar en un intent, però si el total de potes és excessiu haurem de disminuir els porcs i incrementar els pollastres ja que aquests darrers tenen menys potes ... Mirem la taula següent on es pot veure una possibilitat de resultats. Cal tenir en compte que aquest tipus d'exercici es pot fer dirigit a tot el grup classe i són els alumnes els qui han de veure com millorar el resultat anterior. Aquest és un bon exemple per comprendre que cal aprendre dels errors ...

	Porcs Caps	Porcs Potes	Pollastres Caps	Pollastres Potes	
1r intent	60	240	10	20	260 (*massa*)
2n intent	10	40	60	120	160 (*poques*)
3r intent	40	160	30	60	220 (*poques*)
4t intent	35	140	35	70	210 (*molt a prop*)
...	...	...	...	...	...
enèsim intent	30	120	40	80	200 (*correcte*)

Els alumnes trigaran més temps o menys, però si els deixem el temps adequat arribaran per sí sols a solucionar-ho. Probablement els haurem de guiar fins que optin per recollir les dades en una taula.

(c) *3r mètode*

Fem servir la lògica. Suposem que el nostre primer intent ha estat dir que hi ha 50 porcs i 20 pollastres. Amb aquestes dades tenim 70 caps i 240 potes. Hem de reduir la quantitat de potes en 40. Cada vegada que traiem un porc i posem un pollastre la quantitat de caps es manté igual i la quantitat de potes disminueix en dues. Volem reduir 40 potes, per tant haurem de substituir 20 porcs per 20 pollastres. La solució és, per tant, 30 porcs i 40 pollastres.

(d) *4t mètode*

Dibuixem els animals. Com que 70 animals són molts dividim-ho per 10, al final multiplicarem el resultat per 10. Farem servir, per tant, 7 animals que tenen un total de 7 caps i 20 potes. Aquests 7 animals tindran com a mínim 14 potes (ja que com a mínim en tenen dues cada un) i com a màxim en tindran 28 (ja que com a màxim en tenen quatre cada un). Els 7 animals tindran una quantitat parella de potes. Així el total de potes podrà ser 14, 16, 18, ... fins 28. Aquestes són les idees de fons per aquest mètode. No les diguem de cop als alumnes i deixem que siguin ells els qui les vagin descobrint. La primera ajuda és però important per evitar que l'alumne no dibuixi en excés i caldrà que el guiem adequadament.

(e) *5è mètode*

Suposem que tots els pollastres s'aguanten per una sola pota i que tots els porcs es s'aguanten en dues potes. Aleshores tindrem 70 caps i 100 potes repenjades a terra. Com que els pollastres en aquesta situació només tenen un cap i una pota repenjada a terra aleshores les altres 30 potes són dels porcs. Efectivament 30 porcs i 40 pollastres.

Resoldre el problema de cinc maneres diferents obliga a l'alumne a pensar creativament. Tots veiem l'enorme diferència que hi ha entre resoldre aquest problema de les cinc maneres o resoldre aquest exercici com aplicació de la teoria prèviament exposada de sistemes d'equacions lineals de dues equacions amb dues incògnites. En la visió retrospectiva poden anar sortint totes les maneres que els alumnes no hagin fet.

4. *Canviar les condicions del problema*

Els autors anomenen aquesta part la fase *I si...?*. Es tracta de fer canvis (els alumnes han de fer els canvis) en les condicions del problema: fer servir nombres parells en lloc de senars, ... Com canviaria la resposta? Aquesta tècnica permet a l'alumne veure les relacions de causa-efecte entre les condicions del problema i el resultat. El canvi en les condicions d'un problema que té solució pot portar, per exemple, a un problema sense solució o amb infinites solucions. Potser un problema que inicialment no tenia massa interès fora d'una petita pràctica pot adreçar-nos cap a conceptes matemàtics de vàlua.

5. *Estendre el problema, cercant una fórmula o generalitzant-lo*

   El darrer objectiu és descobrir la matemàtica que hi ha en el fons del problema. Així podem arribar a una fórmula o a alguna generalització: nombres primers, quadrats perfectes, ...

2.2 Com resoldre un problema: un diàleg

Per tal de facilitar al docent la introducció de la resolució de problemes a l'aula PÓLYA (1987, pàgs. 51-53) exposa una sèrie d'estratègies que ho faciliten:

Familiaritzar-se amb el problema

- *Per on he de començar?*

  Comença per l'enunciat del problema.

- *Què puc fer?*

  Intenta visualitzar el problema com un tot, tan clarament com puguis. De moment no et preocupis dels detalls.

- *Què hi guanyo fent això?*

  Comprendràs el problema, et familiaritzaràs amb ell, tenint present la intencionalitat del problema en la teva ment. L'atenció que hi dediquis pot estimular la teva memòria i preparar-la per captar els punts importants.

Treballar per una millor comprensió

- *Per on he de començar?*

  Comença un altre cop per l'enunciat del problema. Comença quan aquest enunciat sigui tan clar i el tinguis tan ben gravat en la teva ment que el puguis perdre de vista sense por de perdre'l per complet.

- *Què puc fer?*

  Aïllar les principals parts del problema. La hipòtesi i la conclusió són les principals parts d'un «problema per demostrar»; la incògnita, les dades i les condicions són les principals parts d'un «problema per resoldre». Ocupa't de les parts principals del problema, considera-les una per una, reconsidera-les, considera-les després combinant-les entre sí, establint les relacions que hi pugui haver entre cada detall i els altres i entre cada detall i el conjunt del problema.

- *Què hi guanyo fent això?*

  Estàs preparant i aclarint detalls que probablement entraran en joc més tard.

En busca d'una idea útil

- *Per on he de començar?*

  Comença per considerar les parts principals del problema. Comença quan aquestes parts estiguin, per tu, clarament disposades i concebudes, gràcies al teu treball previ, i quan consideris que la teva memòria *respon*.

- *Què puc fer?*

  Considera el problema des de diferents punts de vista i busca punts de contacte amb els teus coneixements prèviament adquirits. Subratlla les diferents parts, examina els diferents detalls, examina els mateixos detalls repetidament, però de diferent mode, combina entre sí els detalls de diferents maneres, ataca'ls per diferents costats. Tracta de veure un nou significat a cada detall, una nova interpretació de tot el conjunt. Busca punts de contacte amb els teus coneixements adquirits prèviament. Intenta de recordar en què t'han ajudat abans en circumstàncies anàlogues. Tracta de reconèixer alguna cosa familiar en el que examines i de trobar alguna cosa útil en el que reconeixes.

- *Què puc trobar?*

  Una idea que et sigui útil, potser una idea decisiva que t'ensenyi de cop com arribar a la solució del problema.

- *Com pot ser útil una idea?*

  Fent-te veure el conjunt del problema o una part d'aquest. Et suggereix més o menys clarament com pots actuar. Les idees són més o menys terminants. És una sort tenir una idea sigui quina sigui aquesta.

- *Què puc fer amb una idea incompleta?*

  L'has de considerar. Si sembla encertada, l'has de considerar més a fons. Si sembla digna de confiança, has d'esbrinar fins on et pot dur i has de reexaminar la situació. La situació ha canviat gràcies a una idea útil. Considera la nova situació des de diferents punts de vista i busca punts de contacte amb els teus coneixements previs.

- *Què hi guanyo tornant a fer això?*

  Pots tenir la sort de trobar alguna altra idea. Potser la nova idea et condueixi directament al camí de la solució. Potser necessitis encara alguna idea més. Àdhuc és possible que alguna d'aquestes idees et desviï del camí correcte. Tan mateix això, has d'alegrar-te per tota idea nova que surti, també per les de poca importància o confuses, i també per les idees suplementàries que afegeixin alguna precisió a una idea confusa o permetin la correcció d'alguna no tan afortunada. Àdhuc si, durant una estona no se't presenta una idea veritablement bona; considera't afortunat si la teva concepció del problema es fa més completa o més coherent, més homogènia o més equilibrada.

Execució del pla

- *Per on he de començar?*

  Comença per la idea feliç que et condueix a la solució. Comença quan estiguis segur de tenir el punt de partida correcte i estiguis segur de poder superar els detalls menors que puguis necessitar.

- *Què puc fer?*

  Assegura't que tens una plena comprensió del problema. Fes en detall totes les operacions (algebraiques o geomètriques) que prèviament has reconegut com factibles. Comprova la validesa de cada pas, bé per una raonament formal , bé per un discerniment intuïtiu o per ambdós mitjans, si és possible. Si el problema és molt complex, pots distingir «grans» passos compostos de diversos «petits» passos. Comprova primer els grans passos i considera després els petits.

- *Què hi guanyo fent això?*

  Una presentació de la solució per la qual l'exactitud i la correcció de cada pas no ofereix cap dubte.

Visió retrospectiva

- *Per on he de començar?*

  Per la solució, completa i correcta en tots els seus detalls.

- *Què puc fer?*

  Considerar la solució des de diferents punts de vista i buscar els punts de contacte amb els coneixements previs de l'alumne. Considerar els detalls de la solució i tractar de fer-los tan senzills com es pugui; reexaminar-los més extensament i tractar de condensar-los; captar a primer cop d'ull la solució completa. Variar, per millorar-les, tan les parts principals com les secundàries; millorar la solució en el seu conjunt de forma que es faci evident per ella mateixa i quedi gravada, de forma natural, en el conjunt de coneixements previs. Examinar amb atenció el mètode que ha portat a la solució, captar la seva raó de ser i la seva aplicació a altres problemes. Examinar amb atenció el resultat i buscar la seva aplicació a altres problemes.

- *Què hi guanyo fent això?*

  Pots trobar una solució millor i diferent, descobrir nous fets interessants. En tot cas, amb l'hàbit de considerar les solucions i examinar-les atentament, s'assoleixen una sèrie de coneixements correctament ordenats utilitzables en qualsevol moment, alhora que es desenvolupa l'aptitud en la resolució de problemes.

2.3 Aprendre i ensenyar

George Pólya va publicar el seu primer llibre a la meitat del segle XX però la seva visió sobre l'ensenyament de la matemàtica dista molt del pensament predominant d'aquell moment. Miraré a continuació de destacar les seves idees més significatives.

No podem jutjar l'actuació del mestre si no sabem quina és la seva intenció. No podem discutir de forma significativa sobre ensenyar, si no ens posem d'acord fins a un cert punt sobre quina és la finalitat d'ensenyar (PÓLYA, 1981, vol. II, pàg. 100).

Pólya en fer aquesta exposició se centra en les matemàtiques de secundària i entén que la principal finalitat ha de ser *ensenyar aquesta gent jove a PENSAR* (PÓLYA, 1981, vol. II, pàg. 100).

Així, tota aquesta exposició pren sentit si estem d'acord en aquest darrer objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques, en concret a secundària.

Ensenyar a pensar vol dir que el professor de matemàtiques no ha d'impartir únicament informació, sinó que ha d'intentar també desenvolupar l'habilitat dels alumnes per utilitzar la informació subministrada: ha d'emfasitzar coneixements, actituds útils, hàbits mentals desitjables. Aquesta finalitat pot necessitar una més amplia explicació (tot el meu treball imprès sobre ensenyament es pot veure com una explicació més amplia) però aquí n'hi haurà prou posant de relleu únicament dos punts.

Primer, *el pensar amb el que ens interessem no és el somniar despert sinó «pensar amb un propòsit» o «pensar de forma voluntària» (William James) o «pensar productiu» (Max Wertheimer). Aquest* pensar *pot estar identificat, si més no en una primera aproximació, amb «la resolució de problemes». De totes maneres, segons la meva opinió, una de les principals finalitats del currículum de matemàtiques de secundària consisteix en desenvolupar l'habilitat dels alumnes per resoldre problemes* (PÓLYA, 1981, vol. II, pàg. 100).

I de fet el currículum actual (octubre de 2005) així ho diu: ... *dels continguts de caire procedimental no es fa cap referència a la resolució de problemes. Aquesta, tanmateix, ha d'amarar tot el currículum, i ha de permetre la introducció de noves idees, conceptes i mètodes que s'aplicaran després en cada un dels àmbits mencionats. Així, la resolució de problemes, reals i oberts, no pas simples exercicis d'aplicació del què hem fet, és indispensable per assolir bona part dels objectius generals proposats.*[7].

Segon, *el pensament matemàtic no és purament «formal»; no està únicament relacionat amb axiomes, definicions, i demostracions rigoroses, sinó que hi ha moltes altres coses que hi pertanyen: generalització de casos observats, arguments inductius, arguments per analogia, reconèixer un concepte matemàtic, o extreure'l d'una situació concreta. El mestre de matemàtiques té una oportunitat excel.lent per donar a conèixer als seus alumnes tot aquest important conjunt de processos de pensament «informal», i crec que ha d'utilitzar aquesta oportunitat millor, i molt millor, del que ho fa avui. Enunciat de forma incompleta però concisa: ensenyem demostrant naturalment, però ensenyem també conjecturant* (PÓLYA, 1981, vol. II, pàgs. 100-101).

Hi ha aspectes que per molts anys que hagin passat segueixen requerint una millora. Si l'alumne està construint el seu coneixement aleshores ha d'estar familiaritzat amb conjecturar. Però potser l'alumne en aquest moment està molt més familiaritzat amb les fórmules. Aquest ítem ens ha de fer pensar en com s'està

[7] Decret 179/2002, de 25 de juny, pel qual modifiquen el Decret 75/1992, de 9 de març, pel qual s'estableix l'ordenació general dels ensenyaments de l'educació infantil, l'educació primària i l'educació secundària obligatòria a Catalunya, el Decret 96/1992, 28 d'abril, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments d'educació secundària obligatòria i el Decret 75/1996, de 5 de març, pel qual s'estableix l'ordenació dels crèdits variables de l'educació secundària obligatòria (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002)

realitzant l'ensenyament de la matemàtica.

Òbviament ensenyar té molt en comú amb l'art teatral. Per exemple, heu de presentar a la vostra classe una demostració que coneixeu de sobres havent-la presentat tantes vegades durant els anys anteriors en el mateix curs. No podeu estar realment excitat amb aquesta demostració - però, si us plau, no ho mostreu a la vostra classe; si sembleu avorrit, tota la classe estarà avorrida. Simuleu estar excitat amb la demostració quan la inicieu, simuleu tenir idees brillants quan avanceu, simuleu estar sorprès i excitat quan la demostració finalitza. Heu d'actuar un xic pel bé dels vostres alumnes els quals poden aprendre, ocasionalment, més de les vostres actituds que de la matèria presentada (PÓLYA, 1981, vol. II, pàg. 101).

El saber ensenyar requereix, per tant, un saber fer a la classe que ben difícil és que es pugui constatar en qualsevol mena de prova que no sigui l'actuació diària del professor.

Puc explicar-vos una petita història sobre el gran Einstein? Vaig escoltar una vegada a Einstein com parlava a un grup de físics en una reunió. «Per què tenen tots els electrons la mateixa càrrega?» va dir. «Bé, per què totes les petites boles en els excrements de cabra tenen la mateixa mida?» Per què Einstein va dir aquestes coses? Únicament per fer aixecar les celles als esnobs? No tenia el mal hàbit de fer això, crec. Però, probablement, anava més enllà. No penso que aquesta observació sentida per casualitat d'Einstein fos gaire innocent. De totes maneres, vaig aprendre alguna cosa d'aquesta: Les abstraccions són importants; utilitza tots els mitjans per fer-les més tangibles. No hi ha res que sigui massa bo o massa dolent, massa poètic o massa trivial per aclarir les teves abstraccions. Com va dir Montaigne: La veritat és una cosa tan gran que no podem depreciar cap mitjà que ens hi pugui conduir. Per tant, si l'esperit us porta a ser un xic poètic, o un xic groller, a classe, no tingueu un sentit d'inhibició equivocat (PÓLYA, 1981, vol. II, pàg. 102).

L'experiència de PÓLYA (1981, vol. II, pàg. 102) el porta a considerar els tres principis següents sobre l'aprenentatge:

1. Aprenentatge actiu

   La millor manera d'aprendre una cosa és descobrir-la un mateix.

2. Millor motivació

   Per tal que l'aprenentatge sigui eficient, l'alumne ha d'estar interessat en el material que ha d'aprendre i trobar plaer en aquesta activitat. Però, a part d'aquest millor motiu per aprendre, n'hi ha d'altres també, alguns dels quals són desitjables. (El càstig per no aprendre hauria de ser el menys desitjable dels motius).

3. Fases consecutives

   L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables.

   - Fase d'exploració

     Una primera fase d'exploració està més a prop de l'acció i de la percepció i té lloc en un nivell més intuïtiu i més heurístic.

   - Fase de formalització

     Una segona fase de formalització s'eleva cap a un nivell més conceptual, introduint terminologia, definicions i proves.

   - Fase d'assimilació.

     La fase de l'assimilació ve després: hi ha d'haver un intent per percebre el «sentit íntim» de les coses, el material après ha de ser mentalment digerit, absorbit dintre del sistema del coneixement, en el conjunt de la perspectiva mental de l'aprenent; aquesta fase prepara el terreny d'una banda per a les aplicacions, i de l'altra per a majors generalitzacions.

La resolució de problemes cal que vagi acompanyada d'una actitud per part del docent que la faci créixer i en tregui el millor d'ella. Per aquest motiu he volgut exposar la visió de Pólya respecte d'aquest punt.

2.4 Raonament plausible

Els nostres alumnes es troben a la seva vida moltíssimes informacions que han de seleccionar per tal d'optar per aquelles que poden considerar acceptables deixant de banda les que poden ser falsedats, estafes, etc. En la nostra situació tots ens trobem envoltats de molta informació certa, però també de falsa, amb molts nivells de graduació.

Per una altra banda els alumnes es troben dins la classe de matemàtiques aprenent uns continguts que, probablement, s'allunyin molt dels seus interessos. Però hi ha un punt en comú a destacar entre l'aprenentatge de la matemàtica i el que ells es troben en el seu dia a dia: el raonament. Els alumnes sovint han de suposar que en certa situació un cert fenomen deu ser cert; si ma germana no m'ha trucat deu ser que està enfadada... En el fons està fent una conjectura ja que inicialment no en té cap prova. Cal discernir entre aquelles que són factibles de ser admeses de les que poden ser descartades. Aquest ha de ser un objectiu fonamental a la classe de matemàtiques ja que sovint l'alumne haurà de prendre decisions on hi ha diferència d'opinions, fins i tot diferència de resultats.

El coneixement matemàtic l'assegurem a través del raonament demostratiu però primer cal que neixi en l'alumne la necessitat d'aquest raonament (pàg. 68).

L'evidència intuïtiva del físic, l'evidència circumstancial de l'advocat, la documental de l'historiador i l'estadística de l'economista pertanyen al raonament plausible (PÓLYA, 1966, pàg. 13).

El treball intuïtiu tan important per fer inferències en el món de la matemàtica, també ho és per viure aquesta vida. Així doncs, el procés de creació matemàtica no s'apartat tant de l'esperit crític amb el que cal formar l'alumnat de l'ensenyament obligatori. Ara bé, mentre conjecturar sigui una activitat reservada per a la creació matemàtica superior, poc haurem avançat. I tot i que ensenyar a intuir és una tasca difícil, no ho és tant proposar activitats que forcen el treball intuïtiu de l'alumne.

Entenem per generalització el *pas de la consideració d'una sèrie determinada d'objectes a una sèrie més gran que conté a la primera* (PÓLYA, 1966, pàg. 37). Així, parlem de generalitzar quan passem de la propietat d'un triangle a una per qualsevol polígon, quan passem d'un triangle rectangle a qualsevol triangle, quan passem d'una propietat vàlida per un angle agut a una propietat per qualsevol angle, ...

Entenem per especialització (o particularització) *el passar de la consideració d'una sèrie determinada d'objectes a la d'una sèrie més petita continguda en la primera* (PÓLYA, 1966, pàg. 38). Així, si una propietat és vàlida per un polígon qualsevol i la considerem només per triangles, estem particularitzant. També ho estem fent quan una propietat vàlida per un conjunt de nombres la comprovem per algun de concret d'aquest conjunt. Entre altres un exemple el podeu veure a la pàgina 131.

L'analogia és més difícil de definir. Tot i que Pólya ja manifesta aquesta dificultat ens hi podem aproximar acceptant que *dos sistemes són anàlegs si concorden en relacions clarament definibles en les seves parts respectives* (PÓLYA, 1966, pàg. 39). Per exemple, un triangle en una superfície és anàleg a un tetraedre a l'espai. Val a dir que l'analogia pot ser ambigua ja que un triangle en el pla també pot ser anàleg a una piràmide a l'espai.

A vegades l'observació d'una sèrie de resultats o de dades ens porten a induir una certa propietat. Cal estar disposat a refutar aquest tipus de resultats, però per refutar-los primer cal obtenir-los.

La generalització, particularització, analogia i inducció (exemplificades a la secció 4.5, pàg. 103) donen molt de joc en la resolució de problemes permetent passar d'un problema a un altre quan la via de resolució que s'obre permet obtenir resultats útils per l'enunciat inicial. Tots aquests processos són útils i no s'exclouen ja que el procés complet de resolució de problemes (fig. 2.6, pàg. 51) els integra.

2.5 L’actitud del docent. El decàleg

Els treballs de PÓLYA (1981, vol. II, pàg. 116) el van portar a proposar un conjunt de normes que va condensar en *Deu Manaments per Mestres*. En ells exposa la seva visió de la que hauria de ser la tasca diària del docent així com la seva actitud. Aquestes normes són aplicables en qualsevol nivell educatiu però especialment a secundària.

1. *Estar interessat per la vostra matèria.*
   Hi ha tot just un únic mètode infalible per ensenyar: si el mestre està avorrit pel seu tema, tota la seva classe estarà infaliblement avorrida pel tema. Amb això n’hi ha prou per fer evident el primer i més important manament pels mestres: *Estar interessat per la vostra matèria.*

2. *Saber la vostra matèria.*
   Si un tema no té interès per vosaltres, no l’ensenyeu, perquè no sereu capaços d’ensenyar-lo de forma acceptable. L’interès és un «sine qua non», una indispensable condició necessària: però, per ella mateixa, no és una condició suficient. Per molt d’interès que tingueu, per molts mètodes d’ensenyament que feu servir o qualsevol altra cosa que us pugui ajudar, no podreu explicar amb transparència un punt als vostres alumnes que prèviament no entengueu vosaltres amb claredat. Amb això n’hi ha prou per fer obvi el segon manament pels mestres: *Saber la vostra matèria.* Tots dos, interès per, i coneixement de, el tema són necessaris pel mestre. Poso interès en primer lloc perquè amb interès genuí teniu una bona oportunitat per adquirir el coneixement necessari, mentre que un xic de coneixement aparellat amb una manca d’interès pot fàcilment convertir-vos en un mestre excepcionalment dolent.

3. *Tenir coneixements sobre les diferents formes d’aprendre: La millor manera d’aprendre qualsevol cosa és descobrir-la per un mateix.*
   Podeu treure un gran profit llegint un bon llibre o escoltant una bona conferència sobre psicologia de l’aprenentatge. Però llegir i escoltar no són absolutament necessaris, i no són tampoc suficients; heu de conèixer les vies d’aprendre, heu d’estar amb íntima relació amb el procés d’aprendre de l’experiència —de l’experiència dels vostres propis estudis i de l’observació dels vostres alumnes. Acceptar el rumor com evidència per principi és dolent; donar crèdit a la xerrameca com a principi és pitjor. Hi ha un cas en el que no en podeu contentar-vos únicament amb el rumor i la xerrameca, hi ha un principi de l’aprenentatge del que heu de prendre consciència guanyant-vos-el: el principi de l’aprenentatge actiu. Intenteu veure com a

mínim el seu punt central: *La millor manera d'aprendre qualsevol cosa és descobrir-la per un mateix.*

4. *Proveu de llegir les cares dels vostres alumnes, intenteu veure les seves expectatives i dificultats, poseu-vos en el seu lloc.*
   Fins i tot amb un xic d'autèntic coneixement i interès i amb una certa comprensió del procés d'ensenyar podeu ser un mestre «pobre». La situació és inusual, ho admeto, però no tan rara; alguns de nosaltres ens hem trobat amb un mestre que tot i ser força competent era incapaç d'establir «contacte» amb la seva classe. Per tal que l'ensenyament d'un tingui com a resultat l'aprenentatge de l'altre, hi ha d'haver alguna forma de contacte o connexió entre el mestre i l'alumne: el mestre ha de ser capaç de veure la situació de l'alumne; ha de ser capaç de subscriure la causa de l'alumne. D'aquí el proper manament: *Proveu de llegir les cares dels vostres alumnes, intenteu veure les seves expectatives i dificultats, poseu-vos en el seu lloc.* La resposta dels alumnes al vostre ensenyament depèn dels seus coneixements previs, del seu punt de vista i dels seus interessos. Tanmateix, tingueu present i considereu el que saben i el que no saben, el que volen saber i el que no els importa saber, el que haurien de saber i quines coses no és tan important que sàpiguen.

5. *No els hi doneu únicament informació, sinó també «saber fer», actituds mentals, l'hàbit del treball metòdic.*
   Les quatre regles anteriors contenen el que és essencial pel bon ensenyament. Formen conjuntament una espècie de condició necessària i suficient: si teniu interès en, i coneixement de, el tema i si, a més a més, podeu veure la situació de l'alumne i què ajuda o dificulta el seu aprenentatge, sou ja un bon mestre o ho sereu aviat; podeu necessitar únicament un xic d'experiència. Falta explicar algunes de les conseqüències de les regles anteriors, especialment aquelles conseqüències que fan referència al mestre de secundària. El coneixement consisteix d'una part en «informació» i de l'altra en «saber fer». Saber fer és destresa; és habilitat per manejar informació, per utilitzar-la per un propòsit donat; saber fer es pot descriure com un grapat d'actituds mentals apropiades; saber fer és en última instància l'habilitat de treballar metòdicament. En matemàtiques, saber fer és l'habilitat de resoldre problemes, de construir demostracions i d'examinar de forma crítica solucions i demostracions. I, en matemàtiques, saber fer és molt més important que la simple possessió de la informació. Per tant, el següent manament té una importància especial pel mestre de matemàtiques: *No els hi doneu únicament informació, sinó també «saber fer», actituds mentals, l'hàbit del treball metòdic.* Donat que saber fer és més important en matemàtiques

que la informació, pot ser més important en la classe de matemàtiques com ensenyeu que el què ensenyeu.

6. *Deixeu-los aprendre conjecturant*.
   Primer conjectura, després demostra; així és com es produeix la majoria de les vegades un descobriment. Podeu saber això (de la vostra pròpia experiència, si és possible), i podeu saber, també, que el mestre de matemàtiques té una oportunitat excel·lent per mostrar el paper de la intuïció en el descobriment i per tant, imprimir en els seus alumnes una actitud de la ment d'importància fonamental. Aquest darrer punt no és tan àmpliament conegut com hauria de ser-ho i, per aquesta raó, necessita una atenció particular. Desitjo que no desatengueu els vostres alumnes en aquest respecte: Deixeu-los aprendre conjecturant.
   Alumnes ignorants i imprudents tenen tendència a respondre amb conjectures «folles». El que hem d'ensenyar és, evidentment, no a fer conjectures «folles», sinó a fer conjectures «fonamentades» i «raonables». Conjecturar de forma raonable està basat en la utilització de forma prudent de l'evidència inductiva i de l'analogia, i en últim terme abraça tots els procediments del raonament plausible que tenen un paper en el «mètode científic».

7. *Deixeu-los aprendre demostrant*.
   «Les matemàtiques són una bona escola de raonament plausible». Aquest enunciat resumeix l'opinió que subratlla la regla precedent; no sona gens familiar i té un origen molt recent; de fet, crec que puc reclamar reconeixement per aquest. «Les matemàtiques són una bona escola pel raonament demostratiu». Aquest enunciat sona molt familiar —alguna forma d'aquest és probablement tan vella com les mateixes matemàtiques. De fet, és cert molt més: les matemàtiques coexisteixen amb el raonament demostratiu, que predomina en les ciències fins allà on els seus conceptes estan edificats a un nivell lògic-matemàtic suficientment abstracte i definit. Per sota d'aquest elevat nivell no hi ha lloc per un raonament demostratiu real (que està fora de lloc, per exemple, en les qüestions quotidianes). A més (no hi ha cap necessitat d'argumentar un punt tan àmpliament acceptat), el mestre de matemàtiques ha de familiaritzar tots els seus alumnes des dels més elementals nivells amb el raonament demostratiu: *Deixeu-los aprendre demostrant*.

8. *Estar a l'aguait d'aquelles característiques del problema que s'està treballant i que poden ser útils en la resolució de problemes posteriors—intenteu posar de manifest el patró general en que es fonamenta la situació concreta present*.
   El saber fer és la part més valuosa del coneixement matemàtic, molt més

valuosa que la simple possessió de la informació. Però, com hem d'ensenyar el saber fer? Els alumnes només el poden aprendre per imitació i pràctica. Quan doneu la solució d'un problema, subratlleu de forma adequada les característiques instructives de la solució. Una característica és instructiva si val la pena imitar-la, és a dir, si es pot utilitzar no solament en la resolució del problema actual, sinó també en la resolució d'altres problemes—tant més instructiva com més s'utilitzi. Subratlleu les característiques instructives no només lloant-les (fet que pot tenir l'efecte contrari en alguns alumnes) sinó amb el vostre comportament (un xic d'actuació està molt bé si teniu un xic de talent teatral). Una característica ben subratllada pot convertir la vostra solució en un model, en un impressionant patró que, per imitació, l'alumne podrà utilitzar per resoldre molts altres problemes. Com a conseqüència la regla és: *Estar a l'aguait d'aquelles característiques del problema que s'està treballant i que poden ser útils en la resolució de problemes posteriors —intenteu posar de manifest el patró general en que es fonamenta la situació concreta present.*

9. *No donar tot el vostre secret de cop —deixar als alumnes conjecturar abans d'explicar-lo— deixar-los trobar per ells mateixos tan com sigui possible.*
   Desitjo ara indicar un petit truc de classe que és fàcil d'aprendre i que tot mestre ha de conèixer. Quan comenceu a discutir un problema, deixeu que els vostres alumnes conjecturin la solució. L'alumne que ha concebut una conjectura, o que fins i tot ha enunciat la seva conjectura, es compromet: ha de seguir el desenvolupament de la solució per veure si la seva conjectura és certa o no —i per tant ha de mantenir-se atent. Aquest és un cas molt especial de la següent regla, la qual conté i alhora explica algunes parts de les regles 3 i 6: *No donar tot el vostre secret de cop —deixar als alumnes conjecturar abans d'explicar-lo— deixar-los trobar per ells mateixos tan com sigui possible.* De fet, el valor d'aquesta regla es degut a Voltaire que el va expressar de forma més enginyosa: «Le secret d'être ennuyeux c'est de tout dire». «El secret per ser pesat consisteix en dir-ho tot».

10. *Suggerir-ho, no forçar-los a empassar-s'ho.*
   Un alumne presenta un llarg càlcul que ocupa varies línies. Mirant l'última línia, m'adono que el càlcul és erroni, però em refreno a dir-ho. Prefereixo seguir el càlcul amb l'alumne, línia per línia: «Has començat molt bé, el primer càlcul és correcte. La següent línia també és correcta; Has fet això i allò. La propera línia és correcta. Però, que creus d'aquesta línia?» L'error es troba en aquesta línia i si el descobreix ell mateix, té l'oportunitat d'aprendre alguna cosa. Si, tanmateix, d'entrada dic: «Això està malament» l'alumne es pot molestar i no escoltar res del que li digui posteriorment. I

si li dic d’entrada «Això està malament» massa sovint, l’alumne acabarà per odiar-me a mi i a les matemàtiques i tots les meus esforços es perdran, en tot el que a l’alumne fa referència. Estimat company mestre, eviteu dir «Esteu equivocat». Digueu en el seu lloc, si és possible: «Això està bé, però...». Si ho feu així, no sou hipòcrita, senzillament sou humà. Heu de procedir així, està contingut de forma implícita en la regla 3. Però podem fer el consell més explícit: *Suggerir-ho, no forçar-los a empassar-s’ho*. Les nostres dues últimes regles, 9 i 10, van en la mateixa direcció. El que conjuntament suggereixen és deixar als alumnes tanta llibertat i iniciativa com sigui possible dintre de les condicions d’ensenyament existents. Pressionat pel temps, el mestre de matemàtiques està sovint temptat de pecar contra l’esperit d’aquestes regles, el principi d’ensenyament actiu. Pot anar massa de pressa en busca de la solució d’un problema sense donar prou temps als alumnes per plantejar-se’l de forma seriosa. Pot donar un concepte o formular una regla massa ràpid, sense una preparació suficient amb material apropiat, abans que els alumnes puguin sentir la necessitat per aquest concepte o per aquesta regla. Pot cometre el famós error de «deus ex machina»: pot introduir alguna estratagema (per exemple, un recta auxiliar inesperada en una prova geomètrica) que condueix al resultat de forma correcta, però que els alumnes no podrien veure, en tota la seva vida, com és humanament possible descobrir un truc com aquest que apareix directament del no res. Hi ha massa temptacions per violar aquest principi. Deixeu als vostres alumnes fer les preguntes; o feu-los-hi aquelles que ells mateixos es puguin fer. Deixeu als vostres alumnes donar les respostes; o doneu-los-hi aquelles que ells mateixos es puguin donar. En qualsevol cas eviteu respondre preguntes que ningú no ha proposat, ni vosaltres mateixos.

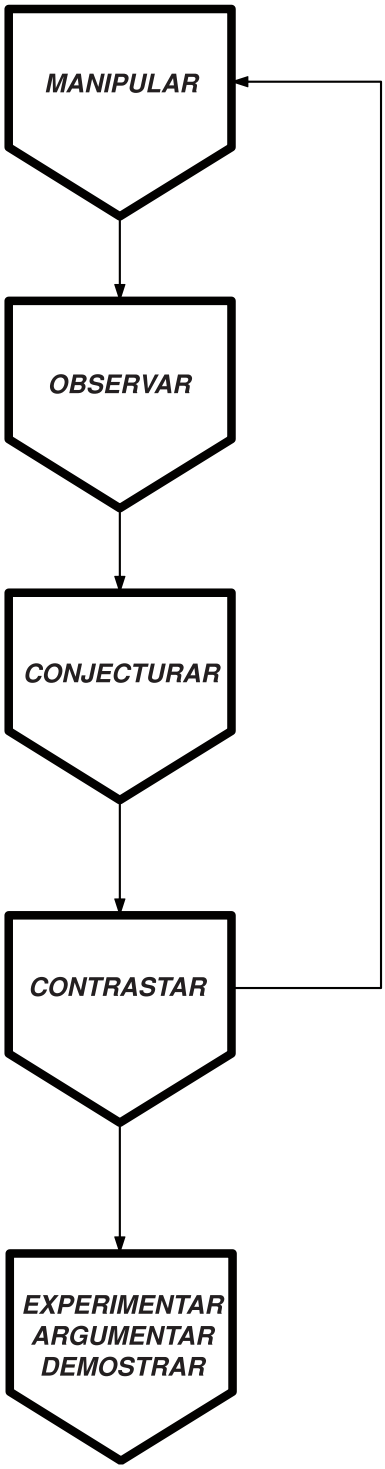

Figura 2.6: Organigrama bàsic sobre el procés de la resolució de problemes.

Capítol 3

De Puig Adam a l'actualitat

Índex

Aquest treball ha començat exposant i exemplificant el model de quatre passos de Pólya. La literatura conté però diverses propostes per treballar la resolució de problemes. A continuació es fa una breu presentació d'algunes d'elles amb la intenció d'atendre les més destacades. Per començar es focalitzarà l'atenció en les aportacions de Pedro Puig Adam per la seva rellevancia educativa. A continuació s'exposa el model de John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey per la seva incidència en el pensament de l'alumne. Tot seguit es fa una breu exposició de les aportacions d'Alan Schoenfeld i finalment es centra l'atenció en el model de Miguel de Guzmán per la seva proximitat a l'ensenyament secundari. Abans de tot això es presenta un breu resum de models per resoldre problemes que han aparegut al llarg del segle XX.

3.1 Diferents models per resoldre problemes

Al llarg del segle XX van ser molts els models per resoldre problemes que es van arribar a proposar. El fet que no s'aprofundeixi en tots ells es podria entendre com un motiu més que suficient per no exposar-los. Tot i així, he optat per fer-ne una breu exposició per tal que si el lector vol aprofundir-hi disposi d'una informació general i de bibliografia bàsica. En aquest apartat es farà, per tant, una pincellada i posteriorment entraré en els més significatius.

John Dewey va presentar model per resoldre problemes amb cinc fases DEWEY (1989):

1. Identificació de la situació problemàtica.
2. Definició precisa del problema.
3. Anàlisi de mitjans-finalitats. Pla de solució.
4. Execució del pla.
5. Avaluació de la solució. Supervisió. Generalizació.

Graham Wallas, que es va preocupar per la psicologia social i la política, va presentar un model per resoldre problemes en quatre fases WALLAS (1926):

1. Preparació. Recollida d'informació i intents preliminars de resolució.
2. Incubació. Deixar el problema per realitzar altres actividats.
3. Iluminació. Apareix la clau per resoldre el problema.
4. Verificació. Es comprova la solució per estar segurs de que funciona.

Lyle Eugène Bourne, Bruce Ekstrand i Roger Dominowski van distingir tres fases en la resolució d'un problema BOURNE *et al.* (1975):

1. Preparació. Anàlisi i interpretació de les dades inicials, de les restriccions i dels possibles camis a seguir per resoldre el problema.

2. Producció. Recuperació d'informació, exploració i potser intent de resolució.

3. Judici. Avaluació de la solució generada i contrast entre el camí seguit i el camí previst.

John Bransford i Barry Stein van proposar un model amb la finalitat de facilitar la identificació i el reconeixement de les diferents parts que cal tenir en compte a l'hora de resoldre un problema BRANSFORD i STEIN (1986):

1. Identificació del problema.

2. Definició i representació del problema.

3. Exploració de possibles estratègies.

4. Actuació, a partit d'una estratègia.

5. Reptes aconseguits. Observació i avaluació de l'activitat realitzada.

Luis Puig i Fernando Cerdán van presentar un model dirigir a la resolució de problemes verbals que consta de les fases següents:

1. Lectura.

2. Comprensió.

3. Traducció.

4. Càlcul.

5. Solució.

6. Revisión. Comprobación.

De Corte i Verschaffel van presentar un model per a la resolució de problemes aritmètics verbals sobre sumes i restes DE CORTE i VERSCHAFFEL (1989):

1. L'alumne construeix una representació del problema amb conjunts i relacions entre ells.

2. A partir d'aquesta representació el resolutor escull l'operació formal o l'estratègia informal adequada amb la finalitat de trobar el valor en la representació.

3. L'alumne executa l'operació o acció escollida.

4. El resolutor torna a la representación inicial del problema per tal de comprovar la solució obtinguda en el problema original.

5. L'estudiant verifica les accions realitzades per tal de garantir la veracitat de les soluciones trobades en la fas anterior.

3.2 Pedro Puig Adam

Pedro Puig Adam va néixer a Barcelona el 12 de maig de 1900 i va morir a Madrid el 12 de gener de 1960. Ingenier industrial i matemàtic va realitzar grans aportacions a la didàctica de la matemàtica tot i que va tenir una incidència minsa a la vista de les seves aportacions.

La matemática y su enseñanza actual PUIG ADAM (1960) és un llibre de 472 pàgines del qual incidiré principalment en les aportacions mostrades en el tercer capítol *El movimiento didáctico renovador*. Tot i que sembla natural que les aportacions de Puig Adam haurien d'estar àmpliament divulgades, la realitat és que aquest llibre costa molt de trobar. En particular, en el moment d'escriure aquest apartat només hi ha un exemplar al Catàleg Col·lectiu de les Universitats de Catalunya[1]. PUIG ADAM (1979, pàgs. 19-30) va arribar a fer una concreció del que considerava que havia de contenir el currículum de l'actual secundària.

3.2.1 Matemàtica *versus* matemàtiques

Puig Adam considera la matemàtica com una unitat i no com un conjunt de diferents disciplines que es puguin englobar sota aquest mateix nom. Per aquest motiu sempre fa servir la paraula *Matemàtica* en singular i mai en plural. El TermCat[2] defineix matemàtiques com la *ciència que estudia les propietats dels nombres, les figures, els conjunts, les operacions, les funcions, etc*. També en una nota adjunta aclareix que *Matemàtiques és una denominació d'ús habitual tant en llengua d'especialitat com en llengua general, així com en classificacions i nomenclàtors internacionals. La forma singular matemàtica ha tingut certa difusió vinculada, especialment, a una concepció unificadora d'aquesta ciència*.

[1]Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya. El Consorci de Biblioteques Universitàries de Catalunya (CBUC) té per missió millorar els serveis bibliotecaris a través de la cooperació: `http://www.cbuc.es/ccuc`.

[2]El TERMCAT, Centre de Terminologia, fou creat l'any 1985 per un acord entre la Direcció General de Política Lingüística del Departament de Cultura de la Generalitat de Catalunya i l'Institut d'Estudis Catalans amb la finalitat de promoure, coordinar i desenvolupar les activitats terminològiques en llengua catalana: `http://www.termcat.net`.

3.2.2 La necessitat de la didàctica de la matemàtica

Hi ha preguntes que per la simplicitat de la seva resposta sovint s'obvien, fet que les converteix en preguntes de resposta no tan immediata. En concret, per què cal didàctica de la matemàtica? Si un llicenciat en matemàtiques ja sap matemàtiques, per què li cal saber didàctica de la matemàtica?

Si miréssim de trametre un coneixement prou elemental tal que no hi hagués dificultat d'aprenentatge i l'alumne pogués assolir tots els objectius que ens proposéssim, aleshores probablement no en caldria de didàctica. Ara bé, si les dificultats d'aprenentatge són manifestes, aleshores cal crear estratègies d'ensenyament-aprenentatge que facilitin l'accés al coneixement de l'alumne. En paraules de Puig Adam: *la transmissió de coneixements crea problemes de programa, de mètode i de manera en tant que els coneixements acumulats sobrepassen les possibilitats de l'alumne al llarg de la seva vida escolar* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 94). Com a conseqüència, la manca de didàctica de la matemàtica, teòricament es pot suplir de diferents maneres, però totes elles cerquen eliminar el problema que suposa generar un coneixement que sobrepassa a l'alumne. Una d'elles és rebaixar el nivell fins el punt en què el coneixement que es vol impartir no sobrepassi l'alumne. Aquesta possibilitat té com a causa la dificultat de transmissió i com a conseqüència una baixada del nivell d'assoliment dels objectius.

Si la humanitat no hagués creat hi hauria poc per aprendre i, per tant, poc per ensenyar. La didàctica de la matemàtica tindria poc sentit, però poc també en tindria la matemàtica pel pobre contingut que hauria generat. Des d'aquest punt de vista la didàctica de la matemàtica la podem entendre com la ciència que orienta i dirigeix el procés d'aprenentatge donant resposta quan els coneixements a impartir superen les possibilitats de l'alumne.

3.2.3 Gènesi i transmissió dels coneixements

Els resultats de les investigacions en matemàtiques al llarg de la història han vingut acompanyats d'una sistematització que els ha presentat de manera ordenada. Aquesta tasca ha estat fonamental pel coneixement humà però cal no perdre de vista que el que s'ha presentat són els resultats, no els processos de creació d'aquests; un bon exemple són els coneguts Elements d'Euclides EUCLIDES (1954). Així, les observacions i les experiències que han donat lloc a conjectures, analogies, etc. han cedit en favor de resultats acabats i tancats. D'aquesta manera cada vegada *s'ha accentuat més la separació entre dos processos que mai s'haurien d'haver divorciat: el de la gènesi dels coneixements i el de la seva transmissió* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 95).

En aquest moment hom està d'acord que l'observació i l'experimentació són necessàries en l'ensenyament de la matemàtica. El que fem començant per observar i experimentar és deixar en segon lloc els resultats finals centrant-nos en el procés de creació. *Comptar, mesurar i construir van ser les primeres operacions matemàtiques de la Humanitat* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 111). Així, la presència d'aules de matemàtiques enteses com a laboratoris o tallers de matemàtiques sembla raonable que hauria de ser un punt al qual tendir; *Quant de camí caldrà recórrer (i falta recórrer encara en molts centres) fins arribar a la classe taller...* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 97). El tipus de raonament que s'ha de treballar en un ensenyament obligatori per tots els estudiants ha de ser tal que sigui vàlid per tots ells, sigui quina sigui l'opció acadèmica o formativa per la que optin. L'experimentació i l'observació han de ser el punt de partida per a la construcció del coneixement ja que, deixant de banda l'exposició de resultats acabats i el raonament lògicodeductiu, cal evitar que la manca d'estratègies didàctiques rebaixi els coneixements a impartir fins a nivells que no compleixen els mínims que requereix la nostra societat.

3.2.4 Sobre el cultiu de la fase d'abstracció

En el currículum vigent fins aquest moment[3] (fins a 11 de desembre de 2005) s'-exposa que el raonament logicodeductiu no és una prioritat[4]. Això pot portar a entendre que per un cantó hi ha un treball experimental on es prioritza la intuïció de l'alumne i per un altre el treball deductiu que es treballa en altres nivells i que queda desvinculat del primer. L'objectiu d'aquest apartat radica en exposar el fet que el raonament logicodeductiu requereix una fase prèvia de experimentació que fa que aquesta en sigui l'embrió que posteriorment haurà de créixer. *Abans d'iniciar el mètode lògic cal haver acumulat en la ment de l'alumne un ric caudal concret d'observacions, d'experiències i de intuïcions efectuades des dels primers anys de l'escola i que, sedimentades en l'inconscient del nen, siguin el germen dels conceptes abstractes (*PUIG ADAM*, 1960, pàg. 100).* Així, l'experimentació no és una manera diferent de fer matemàtiques sinó que és la fase prèvia a l'abstracció; *La facultat d'abstracció no es desenvolupa raonant* in abstracto *sinó començant pel concret (*PUIG ADAM*, 1960, pàg. 100).*

Quan en l'ensenyament secundari els docents construïm teories a partir d'-experimentar exemples i més exemples, podem patir la preocupació de no estar fixant amb solidesa els resultats (no els estem demostrant els resultats). Estem però formant una estructura sòlida d'experiències que li permetrà posteriorment a l'alumne abstreure resultats; *Si abstreure és prescindir d'alguna cosa, és pre-*

[3]Decret 179/2002, de 25 de juny (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002)

[4]A l'educació secundària obligatòria s'ha de valorar d'una manera especial el caràcter instrumental de la matemàtica, per sobre d'altres trets que també la caracteritzen, com són el potencial logicodeductiu i la capacitat d'abstracció formal. *Decret 179/2002, de 25 de juny (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002)*

*cís que comenci per existir aquesta alguna cosa de la qual es pugui prescindir. La deficiència de l'ensenyament de tipus clàssic en aquest punt consisteix en donar les abstraccions per fetes i no ensenyar a formar-les, que és l'útil i eficaç (*PUIG ADAM*, 1960, pàg. 100).*

Així, l'experimentació permet que tot l'alumnat pugui iniciar-se en el treball a l'aula. Per una altra banda serveix als futurs estudiants ja que és la fase prèvia a la fase d'abstracció. Algú podria pensar que està reservada per facilitar l'aprenentatge a estudiants de secundària i probablement als universitaris, però que pels investigadors en matemàtiques la fase d'experimentació és secundària. Ara bé, si entenem que l'experimentació és el canal que permet a la intuïció conjecturar resultats, i que el rigor lògic solidifica els resultats obtinguts; com pot viure el raonament logicodeductiu apartat de l'experimentació? La resposta està donada. L'investigador també experimenta. Per tant, el que cal és que, en tots els nivells, l'experimentació sigui punt de partida de l'ensenyament de la matemàtica, també per afavorir la fase d'abstracció. Ara bé, per a que això sigui possible cal continuïtat i hores d'experimentació i creació matemàtica per a l'alumne.

3.2.5 Concrecions sobre l'ensenyament de la matemàtica

La visió unitària de la matemàtica, la transmissió atenent a la gènesi, el treball experimental útil i eficaç a secundària però alhora necessari pels estudis posteriors requereixen un estudi cíclic, intuïtiu, continuat i no fraccionat que sense salts bruscos formin l'alumne des de la infància fins la universitat.

L'ensenyament heurístic és el més adequat. En ell el professor guia l'alumne per tal que vagi descobrint per si mateix els continguts que ens proposem, conduint l'alumne per un procés de formació anàleg[5] a l'experimentat per la humanitat. Aquesta manera d'ensenyar apropa la gènesi dels coneixements i la seva transmissió.

Considero que la proposta de Pedro Puig Adam encerta en el que ha de ser l'ensenyament de la matemàtica. Ara bé, els professors de secundària hem passat per les facultats de matemàtiques i, si no ha canviat molt, la formació que hem rebut no és la més adequada per formar els nostres alumnes. *La Universitat, tard o d'hora, es veurà forçada a considerar els problemes didàctics en el seu propi ensenyament, tal com els va considerar l'ensenyament primari en el segle passat i els cuida en el present (fa referència al segle XX) l'ensenyament secundari. Els problemes de finalitat, mètode i manera són sensiblement els mateixos, amb les modalitats i diferències pròpies de l'edat. A tota edat és perjudicial el divorci*

[5]S'empra el terme *anàleg* per designar les coincidències d'ambdós processos com a procediments creatius i les diferències pròpies del llenguatge i dels coneixements de partida entre el moment històric i el propi de la realitat de l'alumne.

*excessiu entre els processos de gènesi i de transmissió de coneixements. A tota edat és indicada la conveniència del mètode heurístic, i a tota edat l'interès cap a la matèria d'estudi, hàbilment despertat pel mestre, segueix essent el principal estímul de l'atenció i la millor font d'energia psíquica per vitalitzar una atenció fatigada (*PUIG ADAM*, 1960, pàg. 109).*

3.2.6 Sobre els mètodes i les maneres d'ensenyar

Entenent per mètode d'ensenyament el camí a seguir per assolir un determinat objectiu podem trobar l'analític, sintètic, inductiu, deductiu, intuïtiu, etc. Entenent per la manera d'ensenyar el com s'assoleixen els objectius, tenim l'activa, passiva, individual, col·lectiva, etc.

L'evolució metodològica hauria de respectar l'evolució intel·lectual de l'alumne. S'haurien de respectar, per tant, els períodes d'observació, experimentació, intuïció i finalment, el període lògic.

Els cercles d'interès dels alumnes, l'ambient del grup i fins i tot la quantitat d'alumnes de l'aula haurien de portar a decidir la millor manera d'enfocar l'ensenyament. *No oblidem que el nen té constantment ganes de fer coses, de realitzar pel seu comte troballes i descobriments, i només ens escoltarà de bona gana si estimulem i afavorim amb la nostra explicació els seus desitjos de creació (*PUIG ADAM*, 1960, pàg. 119).*

L'aula de matemàtiques pren per tant rellevància en quant a aula taller o com a laboratori de matemàtiques. De ben segur que en breu podrem entendre l'aula de matemàtiques com una aula que combinarà les idees pròpies de taller, laboratori i aula d'informàtica on la creació tindrà un paper prioritari i el professor guia substituirà el professor conferenciant. *El professor serveix de guia per col·locar l'alumne en situació de descobrir per sí mateix els coneixements que es desitja que adquireixi* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 120).

Ja dins del segle XXI llegir aquestes paraules de fa més de mig segle quasi que ens obliga a forçar aquest ensenyament creatiu. Les aules disposaran en breu de tecnologies per aplicar a l'ensenyament, n'estic ben segur. Ara bé, quines activitats faran els alumnes, per exemple, amb els ordinadors? És ben diferent conjecturar propietats geomètriques amb Cabri-Géomètre a passar un problema a net amb Word. Per tant, ensenyar matemàtiques didàcticament pren encara més rellevància. L'ús correcte de les TIC conduirà a una clara millora educativa de l'àrea de matemàtiques però el seu ús incorrecte podria esdevenir una rutina mimètica on passar apunts i treballs a net prengués un paper prioritari. Així, si Puig Adam destacava la manera d'ensenyar, ara l'hem d'emfasitzar encara més.

3.2.7 L'activitat a l'aula

L'exposició de resultats tancats requereix poc temps pel docent i convida l'alumne a mantenir una posició inactiva. La formació del docent quan era alumne molt probablement fos aquesta. Si ensenya com el van ensenyar repetirà patrons. Cal, per tant, una formació acurada del professorat. La matemàtica deriva cap a abstraccions formalistes i la didàctica cap al descobriment dels processos d'aprenentatge. La formació permanent del professorat és, en conseqüència, fonamental per tal que el professorat format a les facultats doni resposta a les necessitats de l'ensenyament de la matemàtica.

El docent que té clar com ha d'enfocar l'activitat a l'aula es pot trobar, també amb facilitat, una certa inactivitat en l'alumne; actitud que cal corregir. *No n'hi ha prou amb mostrar, si l'alumne roman passiu en la contemplació del que tan vistosament se li presenta; és precís provocar, a més, una activitat seva generadora del coneixement que ha d'assimilar* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 120).

Aquí els recursos són importants, però la utilització que es faci d'aquests és essencial. De poc serviran grans programes informàtics, recursos audiovisuals i altres si la metodologia a l'aula i la manera d'ensenyar no generen activitat creativa en l'alumne.

Però en aquest apartat no cometré l'error de descarregar en cap sector de la comunitat educativa més responsabilitat que en un altre. *Quan cada espanyol consideri l'educació del seu fill com la millor inversió a que pugui destinar la seva hisenda, és probable que l'estat reflexi aquest mateix criteri atenent en primer pla a l'educació dels seus infantants i adolescents* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 132).

3.2.8 Decàleg

Tot i que Puig Adam aclareix que abans que mostrar maneres d'actuar prefereix suggerir maneres de sentir, expressant així les seves reserves sobre el fet de donar pautes concretes relatives a la didàctica de la matemàtica, presenta unes normes didàctiques en forma de decàleg de didàctica de la matemàtica per l'ensenyament mitjà.

1. *Flexibilitat*
   No optar per una didàctica rígida, sinó adaptar-la en cada cas a l'alumne, observant-lo atentament.
   El centre de l'ensenyament avui no és el mestre, sinó l'alumne. L'acció d'aprendre ha arrabassat la seva antiga primacia a l'acte d'ensenyar. Ensenyar és avui estimular i guiar els processos d'aprenentatge. Per això l'acció del mestre queda condicionada en cada cas a aquests processos. Convé aquí recordar especialment aquest caràcter general de l'ensenyament per evitar

que els professors de matemàtiques busquin en la didàctica solucions fixes i rígides com la mateixa Matemàtica.

2. *Teoria genètica*[6]
   No oblidar l'origen concret de la matemàtica ni els processos històrics de la seva evolució.
   Aquest oblit engendra una visió estreta de la finalitat educativa de la Matemàtica, finalitat que no s'ha de limitar al desenvolupament del raonament lògic abstracte. Les nocions i les operacions matemàtiques han tingut el seu primer origen històric en processos d'abstracció i esquematització del món físic real. La humanitat només ha pogut aplicar el mecanisme abstracte als problemes que se li han presentat després d'efectuar aquestes esquematitzacions. Els resultats d'aquesta elaboració abstracta s'han projectat novament al camp de la realitat en la interpretació i atac d'altres problemes. Els processos genètics del pensament matemàtic estan prou vinculats a la seva evolució històrica perquè no oblidem aquesta gènesi i evolució.

3. *Vitalisme*
   Presentar les matemàtiques com una unitat en relació amb la vida natural i social.
   Per la immensa majoria dels nostres alumnes la Matemàtica serà tan sols un instrument d'enfocament en al seus problemes quotidians. Educar-los matemàticament és força més que presentar-los el mecanisme abstracte de l'instrument de buit. Caldrà conrear, igualment i en tot l'ensenyament matemàtic el sentit de les aplicacions.

4. *Gradació*
   Graduar amb molta cura els plans d'abstracció.
   L'abstracció només provoca un allunyament dels problemes quotidians. Les matemàtiques poden oferir a l'ensenyament la seva presencia vinculades amb d'altres disciplines , com la Física, la Química, la Geografia, etc. L'amplitud d'aquestes qüestions pot ser ocasió per a l'organització de treballs en equip, i de promoure útils hàbils de col·laboració social i d'autodisciplina de grups de treball.

5. *Eurisme*
   Ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.
   El noi i la noia no són dipòsits que s'han d'omplir de coneixements sinó potencials que desitgen consentir-se en activitat. Guiem aquesta activitat en

[6]Teoria genètica de Herbert Spencer exposada l'any 1860. La teoria genètica va prendre la seva màxima força a l'empar de la teoria de Darwin que havia publicat la part central dels seus treballs entre 1842 i 1854.

un sentit educatiu. Els processos d'adquisició de coneixements no s'han de divorciar dels d'adquisició o descobriment. La tasca del mestre es provocar l'activitat creadora de l'alumne i d'orientar-la en cada cas cap a la generació del coneixement que es tracti d'adquirir.

6. *Interès*
   Estimular aquesta activitat despertant interès directe i funcional cap a l'objecte del coneixement.
   L'estímul del noi o noia no ha de ser la coacció, o la freda proposta de qüestions que no despertin un interès directe vers llurs necessitats. Cal oferir afectivitat en la comunicació. En contra del que creu molta gent, les matemàtiques poden despertar l'interès i motivar als nostres estudiants ; només cal presentar els continguts en forma estimulant i a partir de situacions properes a l'entorn dels nostres interlocutors.

7. *Autocrítica*
   Promoure tant com sigui possible l'autocorrecció.
   Una de les potencialitats educatives de la matemàtica està en el fet de que els seus resultats són auto-comprovables. En l'educació del caràcter i de la voluntat es fonamental el recurs a l'autocrítica. Un educand acostumat a corregir-se ell mateix pel senzill mètode de la comprovació dels propis resultats i, per tant dels seus propis errors quan els cometi, serà, potser, més cauta a precipitar-se, més segur dels seus passos, més objectiu en els seus judicis i, qui sap, si més humil en les seves apreciacions. Però cal que també el professor s'apliqui aquest precepte, que procuri comprovar objectivament ell mateix els resultats del seu ensenyament i millorar els seus mètodes d'acord amb aquestes comprovacions.

8. *Mestratge*
   Aconseguir un cert mestratge en les solucions abans d'automatitzar-les.
   Sovint es còmode pels mestres subministrar quan més aviat millor *les regles* i repetir-les mecànicament. Actuant d'aquesta manera es crea el perill de provocar en els alumnes un cert automatisme mental. Aquesta manera de procedir es tant més perillosa en quant que el mateix alumne, en el seu afany d'acció, acull amb alegria les regles que li permeten actuar ràpidament abans d'assimilar les essències metòdiques.

9. *Expressió*
   Tenir cura que l'expressió de l'alumne sigui una traducció fidel del seu pensament.
   Cal tenir present el paper d'aprenentatge dels estudiants, deixar que parlin,

que proposin les seves idees -malgrat siguin inicialment errònies- i nosaltres, com educadors, anar-los orientant. D'aquesta manera l'aprenentatge es mes fluït, i l'estudiant va construint el seu propi coneixement.

10. *Èxit*
Procurar a tot alumne èxits que evitin el seu desencant.
Potser cap altre disciplina no crea entre els alumnes desnivells tan acusats com les matemàtiques. Això produeix en els menys dotats veritables complexos de descoratjament i d'aversió envers la matemàtica que ja mai més tindran remei.
Tot ésser humà necessita l'alcaloide espiritual de l'èxit que estimula la seva vida de relació social; i si les grans dosis poden ser funestes, les petites són necessàries. Cal procurar subministrar-les als alumnes menys dotats per tal d'homogeneïtzar, tant com sigui possible, els grups i tenir una sensibilitat que sovint s'oblida.

3.3 John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey

Conegut el mètode de quatre passos de Pólya és fàcil trobar moltes similituds amb el que es presenta en aquest apartat. John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey proposen un model que pretén ser una ajuda per resoldre qualsevol problema. El seu mètode mira d'atendre el que ells en diuen els sentiments del resolutor i està destinat a servir de guia tot partint de l'experiència. És evident la clara influència que té en ell el mètode de Pólya. En el llibre *Pensar matemáticamente* proposen aspectes relacionats amb la resolució de problemes que resumidament es tracten en aquest apartat. Opten per il·lustrar la seva exposició amb gran quantitat d'exemples. *Pensar matemàticament no és una finalitat per sí mateixa; és un procés a través del qual podem incrementar les nostres possibilitats d'elecció. I per ser una manera de procedir, té unes aplicacions molt àmplies, no només per enfrontar-se a problemes matemàtics o científics, sinó molt més generals.* (MASON *et al.*, 1988, pàg. 163).

3.3.1 Sobre la fase de bloqueig

Des del meu punt de vista un dels aspectes més destacats de l'aportació d'aquests autors radica en la insistència que manifesten des d'un començament en tenir un bloqueig o estar encallat. Probablement, la lliçó més important que cal aprendre és la de que estar encallat o bloquejat en un problema és una situació molt digna, que constitueix, a més, una part essencial del procés de millora del raonament (MASON *et al.*, 1988, pàg. 10).

Que l'alumne es quedi mirant el paper en blanc, bloquejat en un càlcul, tens perquè no pot progressar o frustrat perquè no li funciona res, pot portar-lo a abandonar; quants deuen haver abandonat per aquest motiu?... Cal en primer lloc reconèixer que estàs encallat i en segon voler sortir-ne. Diverses actuacions ens poden ajudar: resumir el que saps i el que vols, representar el problema d'alguna manera concreta, aprofitar les particularitzacions que siguin possibles, rellegir buscant possibles interpretacions alternatives, ...

Els aspectes que més es resisteixen poden portar l'alumne al desànim i l'abandonament. Probablement la manca de motivació sigui un dels problemes més grans que calgui ser tractats. Val a destacar però que els procediments de resolució d'un problema són molt més importants que la seva solució i així ho hauria de veure l'alumne. Però no només l'alumne, també el docent ha de fer que això sigui el realment destacat, per exemple, en el seu procés d'avaluació. Les solucions elegants no van néixer de cop i van ser moltes les modificacions i canvis al llarg del procés de resolució del problema; però l'alumne no ho sap si no li diem...

El plantejament que fan es recolza en cinc idees bàsiques (MASON *et al.*, 1988, pàg. 11):

1. Tu mateix pots pensar matemàticament.
2. El raonament matemàtic pot millorar-se per la pràctica unida a la reflexió.
3. El raonament matemàtic ve motivat per una situació en la que es barregen contradicció, tensió i sorpresa.
4. El raonament matemàtic es mou en una atmosfera on els ingredients principals són pregunta, repte i reflexió.
5. El raonament de tipus matemàtic t'ajudarà a entendre't millor a tu mateix i al món que t'envolta.

3.3.2 Particularització versus generalització

La millor manera de començar és abordar un problema concret. De fet si llegim a Pólya, Puig Adam així com altres autors veiem també aquesta visió sobre com cal començar l'abordatge del problema. Si volem arribar a resultats generals és evident que haurem de començar per resoldre casos concrets; dubtar d'aquesta premissa és confondre la creació amb la consolidació de resultats. Així la particularització pren un paper rellevant sota el punt de vista dels autors, punt de vista que comparteixo en la seva totalitat.

Particularitzar significa escollir exemples (MASON *et al.*, 1988, pàg. 35):

Aleatòriament, per fer-se una idea del significat del problema.

Sistemàticament, per preparar el terreny a la generalització.

Hàbilment, és a dir, amb astúcia, per comprovar una generalització.

Els resultats típicament matemàtics són però generals. El procés de generalització comença quan s'intueix un cert esquema general, però, perquè aquesta intuïció aparegui cal que es puguin observar molts casos concrets. Així doncs, l'experimentació i l'observació ens fan intuir resultats generals que anomenem conjectures. Ser molt atrevit a fer conjectures és tant perillós com ser massa prudent a fer-ne (pàg. 22). Tot i així, si les conjectures no són una pràctica habitual a les aules difícilment seran massa atrevits a fer conjectures els nostres alumnes, almenys en un començament. Els autors recomanen que els alumnes prenguin notes de les seves idees quan resolen un problema, del que estan intentant fer i de la seva opinió al respecte. Això lliga amb els comentaris de text matemàtics que es tracten en l'apartat següent.

La generalització constitueix el veritable nervi de la matemàtica (MASON *et al.*, 1988, pàg. 21). Així, quan ens proposem que els alumnes aprenguin a partir de l'experimentació no podem caure en l'error de deixar que es quedin en aquesta fase de l'aprenentatge.

Generalitzar significa descobrir alguna llei que ens indiqui (MASON *et al.*, 1988, pàg. 35):

Què sembla cert (una conjectura)

Per què sembla cert (una justificació)

On sembla cert, és a dir, un plantejament més general del problema (un altre problema!).

Si particularitzar i generalitzar són pràctiques possibles amb els nostres alumnes de secundària i a més són fonamentals en el procés de creació no hi ha dubte que han de formar part del dia a dia de l'ensenyament de la matemàtica.

3.3.3 Comentaris de text matemàtics

Tot i que els comentaris de text matemàtics no els anomenen així Mason, Burton i Stacey, sí que els destaquen (MASON *et al.*, 1988, pàg. 22); per això els exposo en aquest apartat.

Podem entendre per comentari de text matemàtic aquell treball previ a la resolució d'un problema on s'analitzen cadascuna de les seves components. Una estructura podria ser:

1. Lectura completa i detinguda del text.

2. Comprensió de la *història* que narra el problema.

3. Identificació dels termes desconeguts del problema.

4. Cerca, personal o col·lectiva, del significat dels termes del problema, dins del marc contextual del mateix.

5. Lectura del problema i interpretació personal.

6. Identificació de dades i incògnites del problema.

7. Cerca d’una estratègia per la resolució.

El comentari de text es pot entendre com la reflexió prèvia a l’abordatge del problema. Així, el darrer objectiu del comentari de text matemàtic és que desaparegui. Això requereix però un creixement intel·lectual en l’alumne que requereix un temps. Sota el meu punt de vista a les aules de secundària és una pràctica educativa de gran ajuda.

3.3.4 Les fases del treball

John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey divideixen el procés de resolució d’un problema en tres fases. Cal entendre que no són fases que en tots els casos estiguin perfectament delimitades amb un inici i un final. El bon resolutor de problemes és aquell que se sap moure d’una a l’altra segons el que sigui més convenient.

1. *Abordatge*

   Aquesta primera fase es basa en l’experimentació, el recompte i les proves d’assaig i error per tal de familiaritzar el resolutor amb el problema. Hi ha preguntes que ens poden ajudar: què és el que sé?, què és el que vull?, què és el que puc fer servir? I si no ens en sortim no tenim perquè quedar-nos de braços plegats: fes un diagrama, escriu el que saps, aclareix bé el que vols, divideix el que vols en fragments més manejables.

2. *Atac*

   Fase en la qual es resol el problema. Fer conjectures, a petita escala, forma part del nucli del raonament matemàtic (pàg. 74). Contrastar les conjectures obtingudes ens portarà a modificar-les, rebutjar-les o acceptar-les.

3. *Revisió*

   En aquesta fase es mira de resoldre el problema per altres vies i es reflexiona sobre la seva estructura. En aquesta etapa és on es pot arribar a descobrir la riquesa interna del problema. En aquesta fase es pot comprovar la solució, reflexionar sobre les idees i els moments clau del procés de resolució, generalitzar a un context més ampli.

3.3.5 Conjectures i justificació

Donat un problema del qual no tenim una via directa a la seva solució comencem per experimentar. D'aquesta manera tindrem tota una colla de resultats obtinguts per la particularització d'aquest. L'observació dels casos particulars ha d'ajuntar-se a la confiança i valentia del resolutor. De tota manera, es evident que la confiança no s'adquireix dient-te a tu mateix, he de tenir més confiança! (MASON *et al.*, 1988, pàg. 86). Cal fer-se preguntes: podria ser que...? però per què...? vaig a intentar a veure si... La realització de conjectures condueix, per tant, l'alumne a fer-se preguntes per mirar de reconèixer una llei general. Formular, comprovar i modificar conjectures són processos que constitueixen l'espina dorsal de la resolució d'un problema (MASON *et al.*, 1988, pàg. 92). El treball amb conjectures i generalitzacions condueix a la construcció del coneixement matemàtic. Aquesta construcció és imprescindible per l'investigador matemàtic que vol crear nous resultats i també ho és per la construcció del coneixement dels alumnes; els investigadors primer han estat alumnes... I, arribat aquest punt també l'alumne ha de saber que les conjectures són sospitoses. Els autors mostren l'exemple *Círculos i puntos* on mostren que cal no tenir un excés de confiança en les conjectures, cal ser crític. Per tal d'il·lustrar aquest fet pensem en aquestes dues conjectures del triangle de Tartàglia (PUJOL *et al.*, 1999, pàg. 97):

Conjectura 3.3.1 *La suma dels números de cada fila del triangle de Tartàglia és una potència de 2.*

Conjectura 3.3.2 *Els nombres que es poden* llegir *en cada fila del triangle de Tartàglia són potències de 11.*

Ambdues semblen certes a la vista de les primeres files. La segona es pot refutar per poc que avancem. És imprescindible que l'alumne es trobi amb conjectures que fallin. Des del meu punt de vista seria molt poc educatiu que totes les conjectures que s'anés trobant l'alumne fossin certes i no es podessin refutar.

L'observació de diversos casos particulars és el punt de partida que ens porta a conjecturar resultats. Tal com hem vist anteriorment les conjectures s'han de constrastar i refutar ja que poden ser falses. Cal preguntar-se el *per què* i cercar una raó que justifiqui la veracitat de la conjectura. En l'exemple anterior les primeres files del triangle de Tartàglia són potències d'onze i la suma dels nombres de cadascuna de les files són potències de dos. Ambdós resultats són conjectures però cap dels dos té, mentre no s'expliciti, un argument que ens pugui fer creure la seva veracitat mentre que probablement alguns alumnes no dubtarien de cap d'elles. Aquests tipus d'exemples evidencien en l'estudiant la necessitat de trobar arguments que justifiquin la veracitat de les conjectures.

Molt trist té que ser per a un alumne veure una pissarra plena de demostracions quan no ha nascut en ell la necessitat de provar un resultat que el convenç totalment. Si un resultat no el convenç abans que demostrar-lo cal experimentar, observar i conjecturar amb la finalitat de construir.

La construcció d'una conjectura, la necessitat de donar-li solidesa i les dades originals són ingredients necessaris per articular un argument que constitueix la base de les demostracions.

Quan fem una conjectura falsa, hem perdut el temps? No, *en molts casos les conjectures falses són les més valuoses* (MASON *et al.*, 1988, pàg. 104). La resolució d'un problema sovint està plena de passos en fals (veure pàg. 118). *La historia de la matemàtica està plena de raonaments falsos* (MASON *et al.*, 1988, pàg. 105). Aquests errors són el punt de partida des del qual podem generar noves conjectures.

Fer creure una conjectura a un mateix pot ser fàcil, aconseguir-ho en un amic ja és més difícil. Convèncer a algú que qüestiona tot el que afirmes és un objectiu a assolir. Aprendre a assolir aquest paper constitueix una habilitat extremadament important. Provocar i forçar l'alumne a exposar els seus arguments l'apropa a una activitat que viurà de ben segur en la nostra societat, dins i fora de la matemàtica. I és absolutament necessari que aquest treball es realitzi a l'ensenyament obligatori, en cas contrari, seríem culpables de que els alumnes no dubtessin d'afirmacions conjecturals (parapsicològiques i altres) que, si són certes en alguns casos, potser a vegades pretenen establir certeses generals. El raonament matemàtic és una actitud, una posició davant del món (MASON *et al.*, 1988, pàg. 141).

El currículum vigent (fer referència al currículum DOGC 2002) diu que el raonament lògicodeductiu no ha de formar part de la pràctica habitual en l'ESO. Així ho crec, però tampoc pot quedar l'ensenyament en l'experiència, observació i establiment de conjectures. Cal que a l'ensenyament obligatori broti la necessitat de rigor. L'ensenyament de la matemàtica requerirà posteriorment que aquest rigor hagi nascut per tal que pugui créixer. Ara bé, si volem ciutadans amb pensament crític aleshores aquesta és una necessitat molt més àmplia que justifica aquest tipus d'ensenyament a l'aula de matemàtiques.

Els autors incideixen en els sentiments del resolutor tot proposant el que en diuen un *enemic interior* que qüestioni els nostres raonaments. Donen tres hàbits útils que potencien l'escepticisme positiu del resolutor (MASON *et al.*, 1988, pàg. 108).

1. Pren el costum de tractar les afirmacions com a conjectures. Això canviarà la teva perspectiva de la matemàtica com alguna cosa en la que tot és cert o fals, a una matemàtica com una disciplina en la que tot consisteix a modificar i verificar fins que s'hagi trobat una justificació convincent.

2. Pren el costum de comprovar les conjectures mirant de refutar-les, almenys tant com cercar una justificació.

3. Pren el costum d'analitzar críticament (però també positivament) els raonaments d'una altra persona. Això reforçarà la teva consciència sobre la necessitat de comprovar , perquè és molt fàcil passar per alt els errors en una argumentació, especialment si és la teva pròpia.

Però perquè l'alumne pugui refutar primer ha de tenir el què refutar. Per tant, primer cal conjecturar i abans experimentar.

3.3.6 Respecte del plantejament de problemes

Plantejar problemes és una activitat que no es pot deslligar de la resolució. En finalitzar la resolució d'un problema ens trobem en un moment molt adequat per fer extensions generant nous problemes més amplis. *Només quan un resultat encaixa en un context més ampli comences realment a veure el seu significat* (MASON *et al.*, 1988, pàg. 144).

El plantejament de problemes brota com a conseqüència de l'observació i de fer-se preguntes. Això requereix per tant una disposició del resolutor en no abandonar un problema quan ja està que resolt. També cal fomentar la confiança perquè sovint és la que frena l'alumne que es proposa afrontar un problema o plantejar-lo. És difícil trobar confiança en l'alumne que no aconsegueix resoldre cap problema. Aquesta prové de saber què s'ha de fer i també dels èxits obtinguts prèviament. *Aquestes dues fonts de confiança es recolzen en una actitud dinàmica davant del món que té molt en comú amb les actituds que generen els problemes* (MASON *et al.*, 1988, pàg. 151).

Reflexionar, mantenir una actitud activa, dosificar la quantitat d'activitat, acceptar i gestionar els moments de bloqueig, prendre la tasca amb compromís, resoldre tot allò que puguis i deixar madurar allò que es resisteix són entre altres, actituds molt saludables des d'una postura equilibrada. I des d'aquest punt de vista fer-se preguntes i formular problemes és una bona conseqüència.

3.3.7 Sobre el raonament matemàtic

Particularitzar, generalitzar, conjecturar i convèncer són processos habituals per treballar el raonament matemàtic però poden ser difícils pels principiants. Les preguntes que el resolutor es pot fer són una bona pràctica per sortir de les fases de bloqueig: què és el que sé? què és el que vull? com ho puc comprovar? Per altra banda la pràctica i la reflexió són també elements que han de formar part del dia a dia de l'estudiant així com reconèixer quan un està encallat. Davant d'una fase de bloqueig cal acceptar el fet i alhora interpretar i controlar les emocions per tal de no abandonar.

Fa falta temps per la comprensió, per la reflexió, per experimentar, observar i conjecturar, per refutar. I a vegades cal parar i escriure tot el que has fet per tornar-hi en un altre moment. La resolució de problemes porta a fases de bloqueig que també necessiten temps per ser assimilades i gestionades, molt més en els primers anys d'aprenentatge. I quan un problema està resolt cal temps per reflexionar sobre el que s'ha fet així com per formular preguntes i plantejar nous problemes que sorgeixin.

Els problemes que fomenten el raonament matemàtic són aquells que generen sorpresa, contradicció, curiositat i que es gestionen correctament.

3.3.8 Sobre l'autocontrol i l'atmosfera de treball

La resolució d'un problema genera una tensió que ben orientada és positiva. Aquesta s'ha de distingir de la que es genera quan cal fer el problema (per aconseguir bona nota per exemple) i sabem com. L'aprenentatge en la resolució de problemes requereix que es retorni a un mateix problema força vegades al llarg del temps. Aconseguir la solució i abandonar no desenvolupa el raonament matemàtic. El plantejament de noves preguntes al final de la resolució d'un problema pot conduir a nous enunciats més generals o a casos particulars.

Cada persona és diferent i tu has d'aprendre a reconèixer i controlar les conseqüències de la teva pròpia tensió, així com respectar el procés d'aquelles amb les que treballes o ensenyes (MASON *et al.*, 1988, pàg. 161).

Per treballar el raonament matemàtic és fonamental escollir els problemes adequats. A partir d'aquí és fonamental generar en l'alumne la confiança suficient que li permeti interrogar, desafiar i reflexionar. El desenvolupament de l'alumne requereix que no se li doni tot fet. Formular conjectures i trobar dificultats per refutar-les o justificar-les ja és una experiència valuosa.

Així, una atmosfera en la que es fomenta que l'alumne tingui com a màxima preocupació el donar respostes correctes no és l'adequada. En canvi un entorn en el que es formulen conjectures, es contrasten, es refuten, es modifiquen i, potser es justifiquen aporta un clima creatiu i participatiu en l'aula.

3.4 Alan Schoenfeld

Les aportacions de George Pólya (pàg. 21) i les de Pedro Puig Adam (pàg. 53) estableixen els elements fonamentals del marc teòric d'aquesta recerca. Les de John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey (pàg. 64) les completen principalment en el relatiu a la fase de bloqueig, als comentaris de text matemàtics i a l'atmosfera de treball. De les moltes aportacions d'Alan Schoenfeld, tenen repercussions per l'enfocament d'aquesta recerca principalment les relatives als aspectes metacognitius i a les creences. Sovint els resultats de Schoenfeld donen el rigor que requereixen les opinions que sovint ens trobem entre els professors de secundària, per exemple, *els estudiants acostumen a pensar que tots els problemes es poden resoldre en uns pocs minuts* (SCHOENFELD, 1988, pàg. 502).

La interpretació de la resolució de problemes potser no sempre ha estat òptima i s'ha perdut la seva essència. *«Problema» i «resolució de problemes» han tingut al llarg dels anys molts i contradictoris significats* (SCHOENFELD, 1992, pàg. 337). Per exemple i entre moltes altres, una interpretació errònia consisteix en veure el seu mètode de quatre passos (pàg. 21) com una tècnica per aprovar exàmens; mentre que és molt més que tot això. SCHOENFELD (1992, pàg. 337) identifica, a partir de les seves observacions, les següents categories del que hom pot entendre per resolució de problemes:

1. Conduir els estudiants cap al «pensament creatiu» i al «desenvolupament de la seva habilitat per resoldre problemes».

2. Preparar els estudiants en competicions en resolució de problemes com les Olimpíades o altres.

3. Proporcionar als docents estratègies heurístiques.

4. Ensenyar tècniques de qualitat, principalment en la modelització matemàtica.

5. Proporcionar habilitats elementals mirant d'introduir el pensament crític i el raonament analític.

La resolució de problemes, com a estil d'ensenyament i aprenentatge de la matemàtica, no viu aïllada i són molts els factors que hi intervenen. SCHOENFELD (1992, pàg. 348) descriu quatre categories de coneixement i comportament que apareixen involucrats en l'activitat matemàtica:

1. El coneixement de base.
   Les eines que pot utilitzar l'alumne estan entre les que coneix però el coneixement de base es veu alterat per les seves concepcions prèvies. El rendiment en la resolució de problemes depèn a més d'aspectes com la intuïció

del resolutor, el coneixement dels fets i les definicions, l'habilitat en els procediments algorísmics, la familiaritat amb certs procediments rutinaris o el coneixement que té del llenguatge en el que s'expressa un problema.

2. Les estratègies en la resolució de problemes (heurístiques).
   Les heurístiques (pàg. 16) en la resolució de problemes van començar amb George Pólya. Tot i així, tal com diu SCHOENFELD (1992), la utilització d'aquestes no sempre conserven l'esperit adequat que les converteixi en eines de forta rellevància en el procés de resolució. La utilització d'una o altra heurística tindrà sentit en funció del problema en qüestió però també del moment educatiu de l'alumne.

3. Aspectes metacognitius: autoregulació, monitorització i control.
   Entenent per estratègies cognitives aquelles que són utilitzades pel resolutor quan està en procés de resolució d'un problema, les estratègies metacognitives són aquelles que utilitza per controlar els processos cognitius, és a dir, aquelles que pretenen avaluar i controlar el que s'està fent. Així, els components de la metacognició consisteixen en «monitoritzar» o controlar el procés de resolució. Els aspectes metacognitius estan fortament relacionats, per tant, amb el control que es fa dels recursos (coneixement de base) i de les heurístiques de que es disposa. Una de les dificultats més destacades pot venir del fet que l'alumne tingui hàbits de control prèviament apresos i que siguin inapropiats ja que pot ser que s'aferrin al que ja sabien.

4. Les creences i els afectes.
   Les creences que té la persona que vol resoldre problemes tenen una gran incidència en la manera d'enfocar la seva resolució. Així, associar la matemàtica amb l'exactitud condueix a cercar la resposta correcta, aplicar la fórmula correcta o l'algorisme adequat. La manera com hem après els docents té una forta repercussió en les creences que tenim. I quan això s'ha produït esdevé el procés invers: les nostres creences, conscient o inconscientment, influeixen en el nostre comportament matemàtic i en l'ensenyament que transmetem.

5. La pràctica.
   Hom entén en l'actualitat que l'aprenentatge de la matemàtica és una activitat constructiva i social, no receptiva ni individual. És social i no individual perquè la comunitat d'educadors i matemàtics a la que pertanyem els docents influeix en el punt de vista dels que hi estem involucrats. És constructiva i no receptiva perquè així ho acceptem en els nostres objectius. Així, si l'ensenyament de la matemàtica és important per la nostra societat

> aleshores el que els alumnes aprenen a les aules de matemàtiques ha de tenir repercussió més enllà del que és pròpiament la matemàtica (pàg. 3).

L'ensenyament a través de la resolució de problemes té però grans dificultats a la vista de les diagnosis realitzades. SCHOENFELD (1992, pàg. 354) en descriu tres motius:

1. Matemàticament.
   Perquè els docents han de valorar la viabilitat de les diferents aproximacions dels alumnes tot guiant el que podrien fer en cas de no ser fructíferes.

2. Pedagògicament.
   Perquè el docent ha de decidir quan intervenir, quines suggerències ajudaran els alumnes, sense impedir que la resolució segueixi quedant en les seves mans, tot realitzant això per cada alumne o grup d'alumnes.

3. Personalment.
   Perquè el docent estarà sovint en la posició (incòmoda per molts professors) de no saber. Treballar bé sense saber totes les respostes requereix experiència, confiança i autoestima.

Tot reprenent les idees de George Pólya, SCHOENFELD (1985, pàg. 15) va dissenyar un model que profunditza en l'anàlisi de l'heurística.

3.5 Miguel de Guzmán

Les observacions i reflexions que presenta Miguel de Guzmán són rellevants en la matemàtica així com també en la seva educació. Els dos articles DE GUZMÁN (1991*a*, 1992), *El paper del matemàtic enfront els problemes de l'educació matemàtica* i *Tendències innovadores en educació matemàtica*, obren unes reflexions sobre la comunitat matemàtica, el seu ensenyament i llur dificultats així com sobre les peticions de la nostra societat que s'exposen amb una claredat i síntesi que considero fonamentals per entendre i orientar la situació actual del món educatiu.

Miguel de Guzmán destaca que en la resolució de problemes el més important no és la solució sinó el camí que s'ha seguit en el seu procés de resolució; aquest és el que ens ajuda a potenciar la nostra manera de pensar.

A partir de les idees de Pólya, dels treballs d'Alan Schoenfeld i dels de John Mason, Leone Burton i Kaye Stacey, va elaborar un model per a la resolució de problemes. La finalitat que pretén obtenir DE GUZMÁN (1991*b*) amb aquest aquest model és que el resolutor examini i modifiqui els seus propis mètodes de pensament de manera sistemàtica amb la finalitat d'evitar els obstacles, superar els bloquejos i establir hàbits mentals eficaços. Consta de les fases següents:

1. *Familiarització*

   El punt de partida fonamental és la comprensió de l'enunciat des d'un punt de vista global i també dels detalls d'aquest. Hi ha doncs tota una sèrie d'orientacions que cal tenir presents en un primer moment alhora d'enfrontar-se amb un problema. Totes elles han de conduir a que l'alumne ha de ser capaç d'explicar el problema amb naturalitat fent ús de les seves pròpies paraules.

   (a) Comprendre l'enunciat.

       Comprendre l'enunciat abans de començar a escriure. No té sentit escriure sense tenir prèviament una idea clara del que es vol dir.

   (b) Tenir una idea clara de les dades que intervenen, de la relació entre elles i del que se'ns demana.

   (c) Poder explicar el problema amb les nostres paraules.

   (d) Regular el temps necessari per la resolució del problema.

       Probablement un problema no es pugui començar i acabar en una mateixa hora de classe. Cal organitzar-se per tal que, sense demanar presses a cap alumne, es pugui donar un tractament ampli de cada part del procés de resolució.

   (e) Evitar les precipitacions i les presses.

       Si els professors som un model pels alumnes aleshores nosaltres som els primers que hem de mirar de donar exemple.

   (f) Buscar relacions.

       Buscar relacions entre els diferents objectes que ens presenta l'enunciat i examinar quin paper pot jugar cadascun d'ells així com on poden conduir.

   (g) Sortida i arribada.

       Deixar clar el punt de partida i on volem arribar. En la mesura que sigui possible mirar també de veure quin camí podríem seguir.

   (h) Informació necessària.

       Buscar informació que pugui ser d'ajuda en el procés de resolució. És clar, aquella informació que en el moment de cercar es vegi necessària. Posteriorment podran sorgir més necessitats.

   (i) Gust i interès.

       Afrontar el problema amb gust i interès. Condició necessària perquè l'alumne ho faci és que ho vegi en el professor.

2. *Estratègies*

   Es tracta de trobar maneres d'abordar el problema. En aquest moment no cal optar per una de les maneres i desenvolupar-la sinó fer una cerca de diferents maneres d'afrontar-lo. Les que exposa Miguel de Guzmán mostren una clara influència de les exposades anys abans per Pólya.

   (a) Trobar maneres d'encarar el problema.
   (b) Estratègies generals
       - Començar per un cas senzill.
       - Experimentar i buscar regularitats.
       - Fer esquemes gràfics.
       - Escollir una notació.
       - Codificar o modificar el llenguatge a emprar.
       - Buscar semblances.
       - Començar pel final.
       - Suposar que no és possible resoldre'l.
       - Fer ús de tècniques específiques de la matemàtica.
       - ...

3. *Portar a terme*

   Arribat aquest punt cal escollir una estratègia i intentar resoldre el problema. És ben probable que la primera elecció no sigui encertada, però això és molt positiu per l'educació de l'alumne. A la vida no sempre els primers intents donen bon resultat...

   (a) Seleccionar l'estratègia que sembli més factible.
   (b) Portar a terme l'estratègia escollida amb decisió, confiança, ordre, ...
   (c) Assegurar-se d'haver arribat a la solució sense deixar parts per resoldre.
   (d) Apuntar les idees noves que van sorgint en el procés de resolució però sense perdre de vista el camí que estem seguint.
   (e) Revisar l'estratègia escollida si no prospera.

4. *Revisió i conseqüències*

   En haver obtingut la solució no hem acabat i no n'hi ha prou de comprovar-la. Aquesta és una fase fonamental per a la construcció del coneixement.

(a) Posar a punt tots els resultats obtinguts i les anotacions realitzades.

(b) Respondre les següents preguntes a l'atenció del que s'ha realitzat:

- Ha estat adequada l'estratègia escollida?
- S'ha pogut portar a terme correctament?
- La solució obtinguda respon al que el problema demana?

(c) Conseqüències

- Hi ha altres maneres de resoldre el problema?
- Es poden generalitzar les conclusions?
- Poden ser interessants variants en l'enunciat del problema?

Les aportacions de DE GUZMÁN (1991*b*) sobre bloquejos, estratègies de pensament i resolució de problemes faciliten una aplicació efectiva de l'estil d'ensenyament i aprenentatge que aquí s'exposa en l'ensenyament de la matemàtica a secundària.

Capítol 4

Respecte del plantejament de problemes

Índex

La cultura tradicional associada amb les classes de matemàtiques és la de proposar qüestions tancades que es poden respondre ràpidament i que els alumnes poden prendre com a model del tipus de preguntes possibles al proper examen.

En la realitat de les nostres aules sovint és molt més difícil per als alumnes proposar qüestions, per elementals que siguin, que no pas resoldre-les. Tractar preguntes obertes donant respostes que es vagin aproximant a la solució, els ofereix més dificultats que no pas buscar solució a qüestions tancades. Els professors hauríem de demanar als nostres alumnes que proposessin problemes que precisin matemàtiques significatives. *L'experiència d'un alumne en matemàtiques serà incompleta mentre no tingui la ocasió de resoldre problemes que ell mateix hagi inventat. Ensenyant els alumnes la manera de derivar un nou problema d'un problema ja resolt, el professor aconseguirà despertar la curiositat dels seus alumnes* (PÓLYA, 1987, pàg. 173). I la dificultat que experimentem els adults en el plantejament de problemes i les preguntes obertes és conseqüència en gran mesura de l'educació que vam rebre. Les preguntes obertes no són familiars i espanten molts alumnes. Se senten molt més còmodes davant de preguntes de l'estil *Quant val...?*

que no pas de l'estil *Quant pot ser...?* en les quals hi ha diverses possibilitats.

Demanar que els alumnes plantegin problemes comporta que en un primer moment siguem els docents els qui iniciem aquesta tasca. En aquest apartat es treballa aquest aspecte en el qual es veurà que *no es tracta d'elaborar problemes a cegues, sinó que en l'acte de la formulació cal que es contemplin les possibles vies de solució* (LABARRERE SARDUY, 1988, pàg. 51).

Els estudiants acostumen a resoldre però problemes en el seu dia a dia parcialment i intenten buscar estratègies per respondre tot allò que se'ls fa més difícil. Tot i així, els produeix la mateixa inquietud les activitats d'ensenyament i aprenentatge que es realitzen a l'aula?

4.1 Disseny d'activitats i problemes

Des del punt de vista constructivista hom entén que el que es demana a l'educació matemàtica és que l'alumne generi els conceptes que ens proposem que aprengui. Per tal que això sigui possible cal estimular l'alumne amb activitats que generin una inquietud interior com la que esdevé en una comunitat d'experts.

Respecte dels exercicis que requereixen l'aplicació d'un algorisme cal dir que l'aportació per l'alumne serà mínima. Si l'alumne no coneix l'algorisme aleshores romandrà en una fase de bloqueig que intentarà superar, en el millor dels casos, buscant o demanat la repetició sistemàtica d'aquest. Per altra banda si el coneix, aleshores n'haurà reforçat l'habilitat per aplicar-lo però no haurà pogut crear res per ell mateix. L'alumne se sentirà repetint allò que li demanen que repeteixi. Un problema que tingui en el fons una aplicació tècnica d'aquest estil és de fet un exercici d'aplicació rutinària, per tant, no és recomanable si tenim per objectiu ensenyar a pensar els nostres alumnes.

Respecte de l'elecció d'un problema s'ha de destacar l'aportació de ARCAVI (1999, pàg. 52):

- Que l'alumne pugui fer servir la seva experiència prèvia (situació familiar i manipulable) i que hi hagi una invitació implícita per aplicar el seu sentit comú.

  Aquesta fase és especialment important ja que permet que tot l'alumnat pugui iniciar-se en la resolució del problema. Forma part de les estratègies per trencar amb l'ensenyament que s'ha impartit durant molts anys. *L'ensenyament de la matemàtica clàssica s'ha reduït durant molt de temps al cultiu de la segona fase (fa referència a la fase d'abstracció), s'han anat trametent de generació en generació els conceptes matemàtics desproveïts de tota significació real, enrarits a força de depurar-los, i d'aquí el divorci* *entre l'ensenyament de la matemàtica i la realitat...* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 100).

- Que sigui possible resoldre el problema de més d'una manera per tal de generar un diàleg que condueixi a connectar diferents maneres de pensar.
- Que la resposta no sigui accessible només per mitjà de l'aplicació mecànica d'un procediment de càlcul.
- Que el problema convidi a generar noves preguntes, és a dir, que la solució d'aquest desperti la curiositat i l'alumne per si mateix, en grup o amb l'ajuda del professor, obri la possibilitat de seguir explorant la situació.
- Que no sempre hi hagi una resposta única al problema.
- Que la resposta no sigui sempre el resultat d'una operació, sinó la formulació d'un argument, una comparació, una idea, una connexió entre conceptes, una traducció entre diferents representacions.
- Que el problema convidi a retreure una idea, un concepte o una operació en una nova representació, per tractar d'esbrinar, en la mesura que sigui possible, el concepte i separar-lo de les seves representacions típiques.
- Que hi hagi problemes propis de la vida real pels quals l'ús d'eines matemàtiques ajudi a comprendre millor fenòmens que ens envolten.
- Que hi hagi entorns dissenyats per experts però que dins d'aquests entorns sigui l'alumne qui formuli i decideixi quin tipus de problema es proposa resoldre.

Atenent a les aportacions d'Arcavi en el següent apartat es proposa un problema que es pot iniciar en alumnes d'entre catorze i quinze anys. Tal com es veurà es plantegen noves preguntes que generen necessitats que justifiquen apartats posteriors del currículum mitjà o superior.

4.2 Un problema de la prova PISA

Exposo a continuació un problema que va aparèixer a la prova PISA i que es pot consultar al corresponent informe PISA (Program for International Student Assesment) de l'any 2003[1]. Veurem quines dificultats presenta i quin paper juga

[1]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/PISA2003.zip`

la resolució de problemes alhora de donar estratègies per la seva resolució, per plantejar noves preguntes i per generar nou coneixement.

La resolució del problema requereix en un principi el Teorema de Pitàgores. L'anàlisi més detallada mostra que obre preguntes de forta rellevància educativa. Exemplifica el mètode cíclic mostrant els avantatges que aporta per tal de construir el coneixement.

Problema 4.2.1 *La Maria viu a dos quilòmetres del seu col·legi i en Martí a cinc. A quina distància viuen l'un de l'altre?*

L'alumne poc habituat a la resolució de problemes probablement busqui un raonament directe o una fórmula que el porti a la solució; la probabilitat d'èxit és baixa. Si no fos així el problema no generaria coneixement i es tractaria d'un exercici rutinari.

L'alumne habituat a la resolució de problemes sap que, per començar, és fonamental la comprensió de l'enunciat.

I - COMPRENSIÓ EL PROBLEMA

Quina és la incògnita? La distància que hi ha entre les cases on viuen la Maria i el Martí.

Quines són les dades? La distància que hi ha entre el domicili de cadascun d'ells i llur col·legi.

Quines són les condicions? Són suficients per determinar la incògnita? Són insuficients? Són redundants? Són contradictòries? No hi ha condicions. Així, és erroni suposar condicions que l'enunciat no diu. Per exemple, quan l'enunciat diu que la Maria viu a dos quilòmetres del seu col·legi cal pensar en on pot estar casa seva si suposem que el col·legi està en un cert punt.

Fes un dibuix. Simbolitza el problema de forma adient.

No s'hauria de mostrar a l'alumne de cop tota l'essència del problema. Alhora de representar-lo probablement ho farà en algun cas particular. Està bé, és una bona manera de començar[2]. Deixem construir a l'alumne, deixem que s'equivoqui, deixem que ho intenti de nou... Proposem-li que representi a través d'un dibuix les seves idees. Esperem les seves propostes, atenem les seves preguntes, forcem el seu raonament i autocrítica, corregim els seus errors i animem-lo a seguir. Provoquem però no desanimem, guiem però no diguem.

[2]Si representem el col·legi per un determinat punt, aleshores la casa de la Maria pot estar en qualsevol altre que disti del col·legi dos quilòmetres. Però, quins són els punts que estan a dos quilòmetres del col·legi? Els que estan sobre la circumferència de centre el col·legi i radi dos quilòmetres. De la mateixa manera la casa d'en Martí està sobre la circumferència de centre el col·legi i radi cinc quilòmetres.

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

T'has trobat amb un problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual? Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la incògnita i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant. Aquí tens un problema relacionat amb el teu i ja resolt. Pots utilitzar-lo? Pots utilitzar el seu resultat? Podries utilitzar el mateix mètode? Hauries d'introduir algun altre element que et permetés utilitzar aquest mètode? Pots enunciar el problema d'una altra forma? Pots plantejar-lo de nou d'una manera diferent? Si no pots resoldre el problema proposat, intenta resoldre primer algun problema semblant. Pots imaginar un problema anàleg que et sigui més fàcil? Un problema més general?

Probablement no. En cas afirmatiu cal donar la paraula a l'alumne i veure quines propostes poden orientar cap a un camí per resoldre el problema.

I un cas particular? Probablement algun alumne hagi proposat un cas particular en la comprensió del problema. Un esquema gràfic correcte, encara que es tracti d'un cas particular, ens permet establir un pla. Si no sorgeix és el moment d'insistir en els casos particulars. Deixem que descobreixin per ells mateixos sense interrompre els seus raonaments. Si es necessari, en finalitzar un cas particular estimulem l'alumne amb un altre, però no els diguem el cas general.

Potser han suposat que el col·legi i les cases de la Maria i en Martí estan en una mateixa recta, és a dir, alineats. Aleshores es presenta el cas en què la Maria i en Martí estan en una mateixa banda respecte del col·legi (el col·legi i les cases de la Maria i en Martí estan sobre una mateixa semirecta que té per origen el col·legi) (fig. 4.1, pàg. 83):

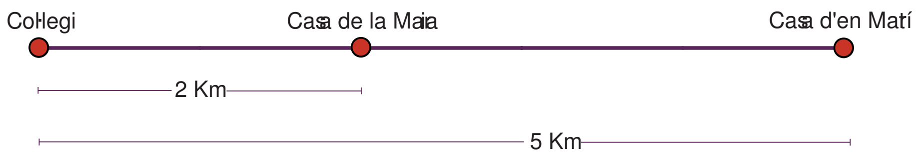

Figura 4.1: Resolució d'un problema de la prova PISA. Cas particular en què el col·legi i les cases de la Maria i en Martí estan sobre una mateixa semirecta que té per origen el col·legi.

I/O possiblement han suposat que, estant aquestes tres llocs alineats, les cases de la Maria i en Martí no estan sobre una mateixa semirecta amb origen en el col·legi (fig. 4.2, pàg. 84):

Tot i que ara és difícil no continuar amb l'execució del pla, primer cal acabar de concebre'l ja que hi ha més possibilitats. I aquesta és la pregunta que cal fer-los. Poden estar ubicades d'alguna altra manera les cases de la Maria i en Martí respecte del col·legi?

Figura 4.2: Resolució d'un problema de la prova PISA. Cas particular en què el col·legi i les cases de la Maria i en Martí no estan sobre una mateixa semirecta amb origen en el collegi.

Cal deixar que els alumnes experimentin, opinin, parlin i s'equivoquin. L'error ha de ser utilitzat correctament per tal que sigui una eina positiva per l'aprenentatge. Caldrà forçar i provocar l'alumne amb la finalitat que vegi que hi ha molts llocs on pot estar la casa de la Maria per tal que estigui a dos quilòmetres del col·legi.

Dibuixem un punt a la pissarra que representi el col·legi i un punt que sigui la casa de la Maria, que està a dos quilòmetres. Quins altres punts estan a aquesta mateixa distància del col·legi? No els ho diguem. Forcem, provoquem. És l'alumne qui ha de veure que n'hi ha molts de punts en aquestes condicions. Hauran de concloure que tots els punts que estan sobre la circumferència de centre el col·legi i radi dos quilòmetres ho verifiquen. Permetem-los que descobreixin per ells mateixos la definició de circumferència com a lloc geomètric... Cal experimentar a fons aquest cas. La comprensió del problema depèn de la comprensió d'aquesta definició. Aquesta és una manera excel·lent d'introduir una definició; s'introdueix quan l'alumne en té necessitat. I ara seria convenient seguir treballant-la. Fem-ho amb el cas de la casa d'en Martí (fig. 4.3, pàg. 85). És convenient que l'alumne experimenti en tot moment. La següent miniaplicació de cabri[3] els ho pot facilitar. Millor seria però que ells mateixos aprenguessin a construir les seves pròpies aplicacions i ho fessin. En aquesta miniapliació els alumnes podran veure quina és la distància entre les cases de la Maria i d'en Martí segons el lloc que ocupin, és clar, complint les condicions de l'enunciat del problema.

Donats els dos casos particulars inicials i també el cas general podem mirar de veure les dificultats que tindrem amb l'un i amb l'altre. Probablement veuran que els casos particulars són tractables mentre que el cas general sembla complex. Tot i així, hi ha algun cas particular que puguem tractar amb més facilitat? La dificultat del cas general prové del fet que es tracta de resoldre un triangle qualsevol del qual coneixem dos costats i volem trobar el tercer. Però, si aquest triangle fos rectangle o isòsceles, sabríem trobar el tercer costat coneguts dos d'ells? Si l'alumnat està familiaritzat amb el teorema de Pitàgores haurem de suggerir-li que cerqui casos particulars que pugui resoldre. D'aquesta manera es presentaran dos casos en què el triangle determinat per la casa de la Maria, la d'en Martí i el

[3]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/Problema-PISA-Applet.htm`

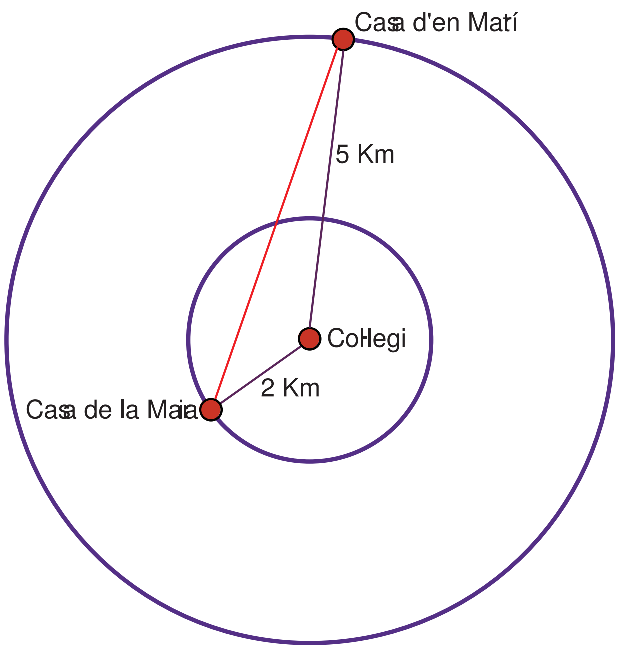

Figura 4.3: Resolució d'un problema de la prova PISA. Cas general.

col·legi són triangles rectangles (fig. 4.4, pàg. 86) i (fig. 4.5, pàg. 87).

I abans d'executar el pla insistim de nou. Hi ha algun altre cas particular que puguem tractar? De nou haurem de forçar que pensin, i si cal, suggerir que saben resoldre un triangle isòsceles per tal d'obtenir el dibuix corresponent (fig. 4.6, pàg. 88).

El triangle determinat pel col·legi i les cases de la Maria i en Martí té un nombre limitat de possibilitats. Atenent als seus angles pot ser rectangle, cas que ja hem tractat, i també obtusangle i acutangle. Atenent als seus costats i sabent que dos d'ells mesuren dos i cinc quilòmetres doncs només pot passar que sigui isòsceles o escalè, que també són casos tractats. Ara estem en condicions de passar a l'execució del pla.

III - EXECUCIÓ DEL PLA

Mentre portes a terme el pla per trobar la solució, comprova cada un dels passos. Pots veure que el pas és correcte. Pots demostrar-lo?

Si les cases estan sobre una mateixa semirecta amb origen en el col·legi aleshores l'alumne només haurà de calcular la diferència entre la distància de la casa d'en Martí al seu col·legi i de la Maria al seu. La dificultat radica en haver comprès el problema i haver establert un bon pla.

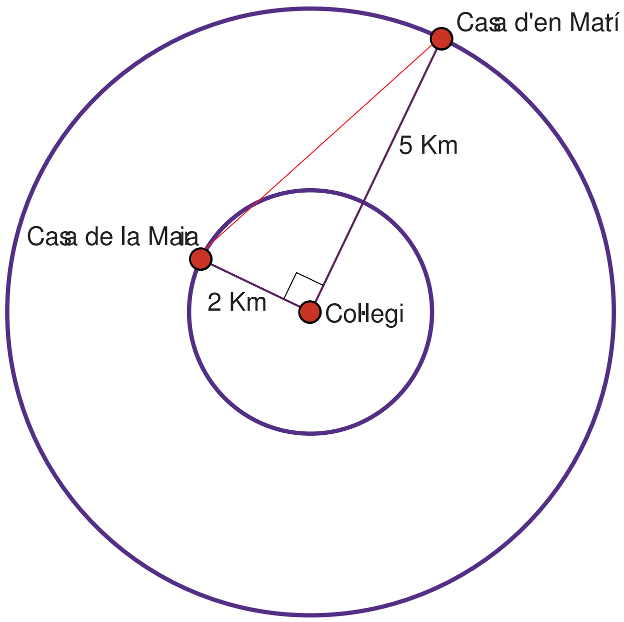

Figura 4.4: Resolució d'un problema de la prova PISA. Primer cas de particularització del cas general en un triangle rectangle.

De manera semblant si el col·legi, la casa d'en Martí i la de la Maria estan sobre una mateixa recta però no sobre una mateixa semirecta de centre el col·legi aleshores caldrà calcular la suma d'ambdues distàncies.

En els casos en què les cases formin amb el col·legi un triangle rectangle caldrà fer ús del Teorema de Pitàgores obtenint $\sqrt{29}\,Km$ i $\sqrt{21}\,Km$, segons si l'angle recte té el vèrtex en el col·legi o en la casa de la Maria.

En el cas que les cases formin amb el col·legi un triangle isòsceles, aleshores la distància entre la casa d'en Martí i la de la Maria coincideix amb la distància entre la casa d'en Martí i el col·legi i és, per tant, de cinc quilòmetres.

En el cas que ambdues cases i el col·legi formin un triangle no rectangle ni isòsceles els alumnes que no estan familiaritzats amb el teorema del cosinus hauran d'experimentar. Experimentant veuran que els resultats varien molt i que caldrà en un futur aprendre més matemàtiques per arribar a un resultat plenament satisfactori. Ara bé, això no treu que els alumnes poden estudiar algunes situacions particulars i donar respostes aproximades. Així, la prova PISA mostra un problema obert que no pot ser resolt fins al final. Aquest és un punt que considero molt positiu i molt proper a la nostra vida real. Sovint no podem resoldre completament un problema, però això no treu que puguem respondre fins allà on sapiguem i experimentar quan no tinguem eines suficients.

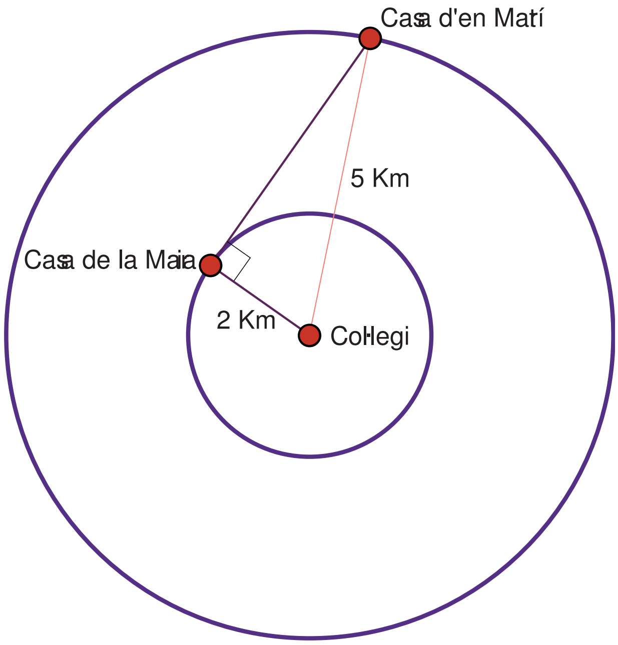

Figura 4.5: Resolució d'un problema de la prova PISA. Segon cas de particularització del cas general en un triangle rectangle.

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

Pots verificar la solució obtinguda? Pots verificar el raonament utilitzat? Pots obtenir el resultat de diferent forma? Pots veure'l d'un cop d'ull? Pots utilitzar el resultat o el mètode en algun altre problema?

Aquestes preguntes generaran un diàleg ben profitós. Ara bé, aquest problema es caracteritza per centrar la seva gran dificultat en la comprensió. El fet que l'alumne no pugui resoldre tots els casos és un aspecte molt positiu. És a dir, segons l'aprenentatge adquirit fins el moment de realitzar el problema podrà finalitzar els càlculs de més o menys casos. En qualsevol cas els dos primers que es resolen sumant i restant sí que els podrà resoldre, els que requereixen el Teorema de Pitàgores probablement també i el cas general que requereix del Teorema del Cosinus probablement haurà d'esperar a ser resolt a batxillerat. La resolució del problema permet veure la importància dels decimals en una situació real. Si en la resolució del problema es produeix un error en les dècimes, en la situació real afectarà a centenars de metres, en les centèsimes afectarà a desenes de metres, ...[4] L'alumne

[4]Tot problema amb decimals hauria de comportar una reflexió sobre la magnitud real d'aquests. Obviar aquesta reflexió pot donar lloc a situacions com aquesta: *...al preguntar-li per què havia donat quatre xifres decimals d'un determinat nombre d'obrers, em va contestar compungit, perquè no havia tingut temps de treure'n més.* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 102)

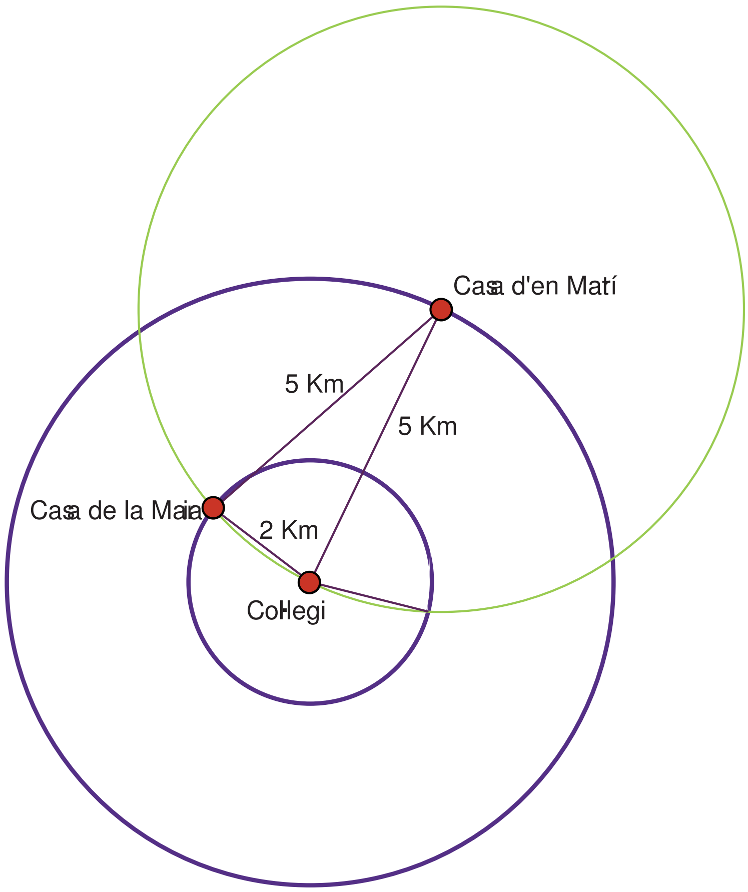

Figura 4.6: Resolució d'un problema de la prova PISA. Particularització del cas general en un triangle isòsceles.

ha après o repassat una lliçó molt útil a la vida: davant d'un problema el primer que cal fer és entendre'l i un cop realitzat això, mirar de resoldre'l.

El problema també permet introduir aspectes relatius a les funcions. Fixem la casa d'en Martí i observem com varia la distància entre els habitatges d'ambdós quan la casa de la Maria recorre la circumferència amb centre en el col·legi i radi $2\,Km$. En la següent miniaplicació de Cabri[5] l'alumne podrà experimentar. Com que aquest problema es dirigeix inicialment a segon curs d'ESO (13a-14a) acceptem que està familiaritzat amb la desigualtat triangular. En cas contrari és necessari introduir aquesta propietat experimentant com han de ser tres longituds perquè amb elles es pugui construir un triangle; dues qualssevol d'elles han de ser superiors a la tercera.

[5]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/pisa-funcion.htm`

El treball amb les figures (fig. 4.7, pàg. 89) permet establir resultats fonamentals per tal que futurs aprenentatges es puguin construir sobre coneixements sòlids. Aquests instruments elementals són, alhora que evidents en edats prematures (13a-14a en aquest cas), necessaris en estudis posteriors.

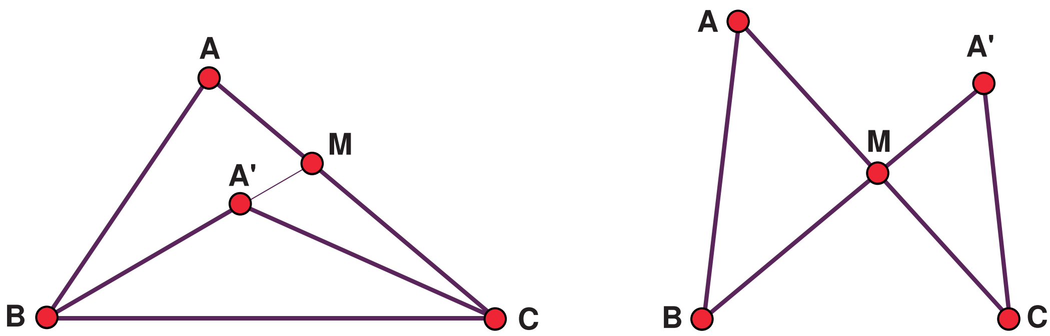

Figura 4.7: Dos lemes que donen solidesa al problema i a continguts posteriors.

En el triangle de l'esquerra (fig. 4.7, pàg. 89) es pot veure que $AB + AC > A'B + A'C$. Per fer-ho s'ha afegit el punt auxiliar M que facilita la doble aplicació de la desigualtat triangular.

Lema 4.2.1 *En el triangle de l'esquerra de la figura (fig. 4.7, pàg. 89) tenim* $AB + AC > A'B + A'C$

Mirant el triangle $\triangle ABM$ tenim que $AB + AM > MA' + A'B$
Mirant el triangle $\triangle A'MC$ tenim que $MC + MA' > A'C$
Sumant ambdues expressions $AB + (AM + MC) + MA' > MA' + A'B + A'C$
com que $AM + MC = AC$ tenim $AB + AC > A'B + A'C$

En la figura de la dreta (fig. 4.7, pàg. 89) tenim que $AB + A'C < AC + A'B$. Afegim el punt M que facilita la doble aplicació de la desigualtat triangular.

Lema 4.2.2 *En la figura de la dreta (fig. 4.7, pàg. 89) tenim* $AB + A'C < AC + A'B$

Mirant el triangle $\triangle ABM$ tenim que $AB < AM + BM$
Mirant el triangle $\triangle A'BC$ tenim que $A'C < MC + MA'$
Sumant ambdues expressions $AB + A'C < (AM + MC) + (BM + MA')$
obtenim $AB + A'C < AC + A'B$

Aquests resultats permeten establir que la distància entre les cases d'en Martí i la Maria creix quan la d'aquesta darrera es desplaça des d'A fins a B. En la figura (fig. 4.8, pàg. 90) i aplicant el lema 4.2.1 obtenim que $RM' + M'C > RM + MC$. Com que $M'C = MC$ tenim que $RM' > RM$. Per tant, la distància RM creix quan M es desplaça des d'A fins a T.

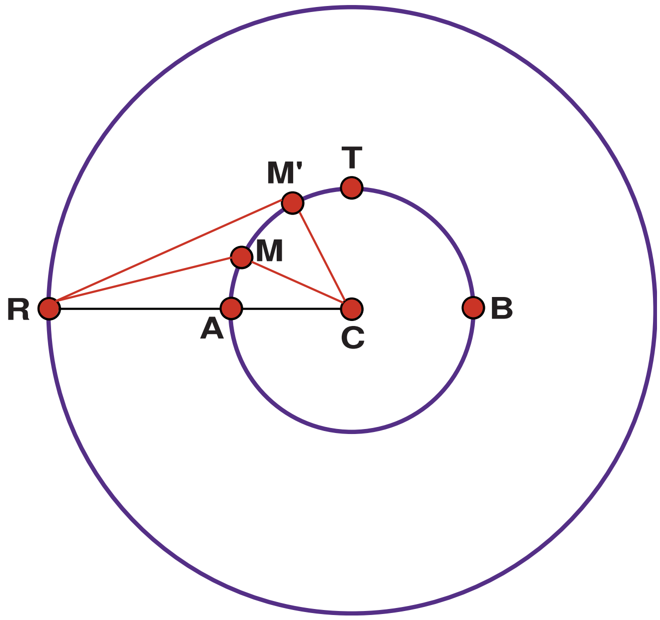

Figura 4.8: La distància entre les cases d'en Martí i la Maria creix quan la d'aquesta darrera es desplaça des d'A fins a T.

Quan M arriba al menor arc de circumferència TB (fig. 4.9, pàg. 91) pel lema 4.2.2 tenim que $RM' + CM > RM + CM'$. Com que $CM = CM'$ obtenim la desigualtat $RM' > RM$. Per tant, la distància RM creix quan M es desplaça des d'A fins a B.

S'apreciarà que el problema surt d'una situació experimental i arriba a establir resultats ferms. A partir dels dos lemes enunciats es pot també oferir un argument pel tercer criteri d'igualtat de triangles[6]. Anys després l'alumne podrà prendre coordenades polars i fer un estudi analític.

Aquest problema no s'ha escollit per deixar el lector bocabadat. Qualsevol problema, tot i plantejat per un altre, pot i ha de generar riquesa intel·lectual.

[6] El tercer criteri d'igualtat de triangles diu que *dos triangles que tenen els tres costats iguals són iguals.*

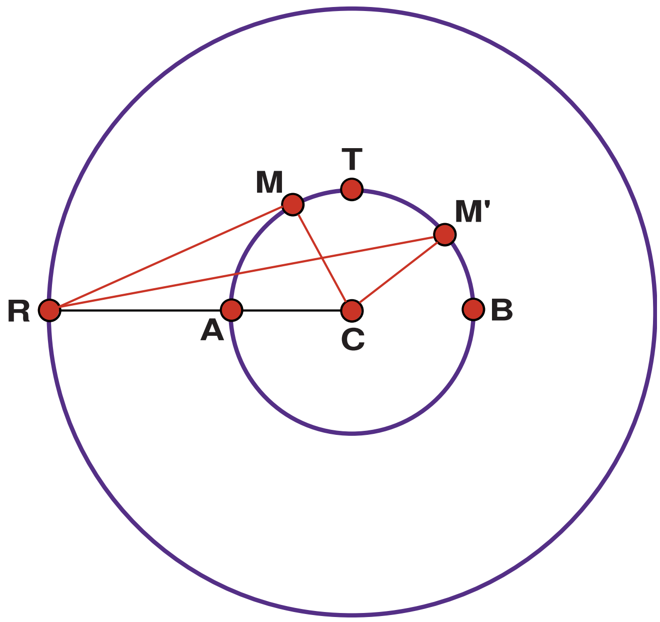

Figura 4.9: El creixement de la distància entre les cases d'en Martí i la Maria es produeix quan la d'aquesta darrera es desplaça des d'A fins a B.

4.3 ... de l'experimentació als grans resultats

Aquest problema vincula, des d'una pràctica experimental, una situació real amb grans problemes de la matemàtica. Potser no són massa habituals aquests tipus d'activitats, però m'atreveixo a postular que són fonamentals per a la construcció del coneixement de l'alumne. Des d'un problema proper a la seva realitat es dóna significat a conceptes matemàtics avançats així com a grans problemes de la història. L'alumne de segon curs d'ESO (13a-14a) no aconsegueix (ni es pretén) la seva consolidació deductiva completa però sí la seva experimentació. Aquest tipus d'activitats creatives generen en ell un gran nombre de preguntes amb respostes plausibles obtingudes des d'activitats d'exploració. Si algú considerés que aquest tipus de problemes no són tractables a l'ensenyament secundari seria equivalent a mantenir que l'exemple PISA (pàg. 81) és desproporcionat. Aquestes activitats intractables a secundària des d'un punt de vista deductiu són fonamentals en l'ensenyament. El treball experimental ha de generar coneixement, però també necessitat de rigor; si no fos així, per què l'ensenyament hauria en algun moment d'optar per un estil deductiu?

Problema 4.3.1 *En un cert territori geogràfic hi ha cinc pobles grans i altres més petits. Disposen només de carreteres que uneixen cada poble amb el més proper.*

Els responsables d’obres públiques ens demanen un estudi per tal d’optimitzar la comunicació entre ells.

I - COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA

La construcció pot optar per minimitzar el temps de viatge del conductor, el quilometratge de carretera a construir, el pressupost total, ...

Quina és la incògnita? Quines són les dades?

Les incògnites són diverses: quantitat de carreteres per construir, quantitat d’interseccions entre elles (que ens obligaran a fer un túnel, pont, rotonda, ...), ...

Donada la magnitud del problema, l’acotem inicialment i ens preocupem per la quantitat de carreteres que caldrà construir per anar d’un poble, dels cinc considerats, a qualsevol altre per una via directa, és a dir, optimitzant el temps de viatge del conductor (suposant que l’orografia ho permeti).

L’enunciat ens ofereix la possibilitat de dibuixar, experimentar i comptar (fig. 4.10, pàg. 92):

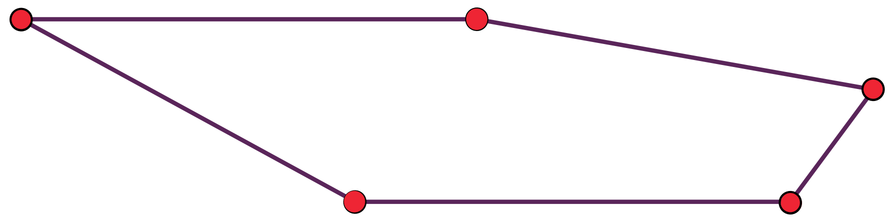

Figura 4.10: Esquema gràfic per la resolució d’un problema. Situació de cinc pobles en un territori geogràfic.

Aquests pobles ja disposen d’algunes carreteres. Quantes en caldrà construir? Deixem-los dibuixar.

II - CONCEPCIÓ D’UN PLA

Les preguntes habituals proposades en el mètode de quatre passos de Pólya de ben segur que ens ajudaran. Probablement l’alumne ja hagi dibuixat i experimentat amb les diagonals d’un polígon a l’àrea de visual i plàstica. Així, la fase experimental conduirà amb facilitat al dibuix i al recompte directe[7]. Seria forçat en aquest moment voler que l’alumne fes un altre tipus de recompte, ja sorgirà la necessitat posteriorment.

[7]No s’ha de menysprear el recompte directe. La matemàtica va ser aplicada abans que pura i té un origen concret i empíric (PUIG ADAM, 1960, pàg. 112).

III - EXECUCIÓ DEL PLA

L'alumne respondrà amb seguretat que són cinc les carreteres que cal construir (fig. 4.11, pàg. 93). El recompte directe no suposa cap dificultat per ell. Un altre tipus de recompte, de moment, no té la necessitat justificada.

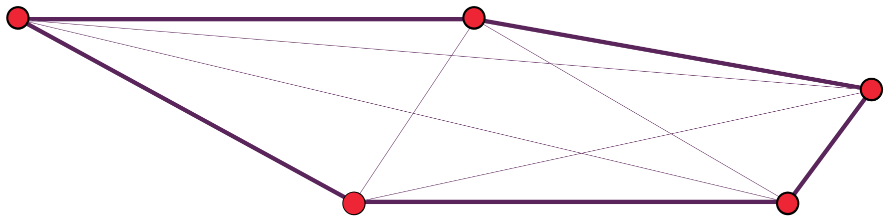

Figura 4.11: Carreteres que cal construir entre els cinc pobles.

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

La verificació es realitza per observació de l'esquema gràfic. Podem utilitzar aquest resultat en un altre problema? Podem procedir de la mateixa manera en el cas de sis pobles? I de set? ...

Problema 4.3.2 *En un cert territori geogràfic hi ha més de cinc pobles. Quantes carreteres caldrà construir si, tal com abans, cada poble ja està comunicat amb dos dels considerats?*

Ara l'alumne es troba davant d'un problema més general (fig. 4.12, pàg. 94).

Procedint d'aquesta manera l'alumne descobrirà ràpidament que la quantitat de carreteres és cada vegada més elevada. Ens cal trobar alguna manera de comptar les carreteres que ens faciliti el recompte quan considerem molts pobles. En incrementar la quantitat de pobles, la de carreteres creix fins el punt que el recompte directe es fa intractable. Apareix així un motiu que justifica la necessitat d'una tècnica més elaborada que ens faciliti el recompte.

Si l'observació dels esquemes gràfics realitzats no condueixen l'alumne a la producció de conjectures, serà necessari facilitar-los una ajuda: *quantes diagonals surten de cada vèrtex?* No cal dir més, deixem que ho descobreixin per ells mateixos.

Aquesta ajuda pot conduir a veure que de cada vèrtex d'un pentàgon surten dues diagonals. Com que cada diagonal surt de dos vèrtexs, el total de diagonals és la meitat del producte entre la quantitat de vèrtexs i la quantitat de diagonals que surten d'un d'ells. Amb l'hexàgon es pot procedir de manera similar. Deixeu

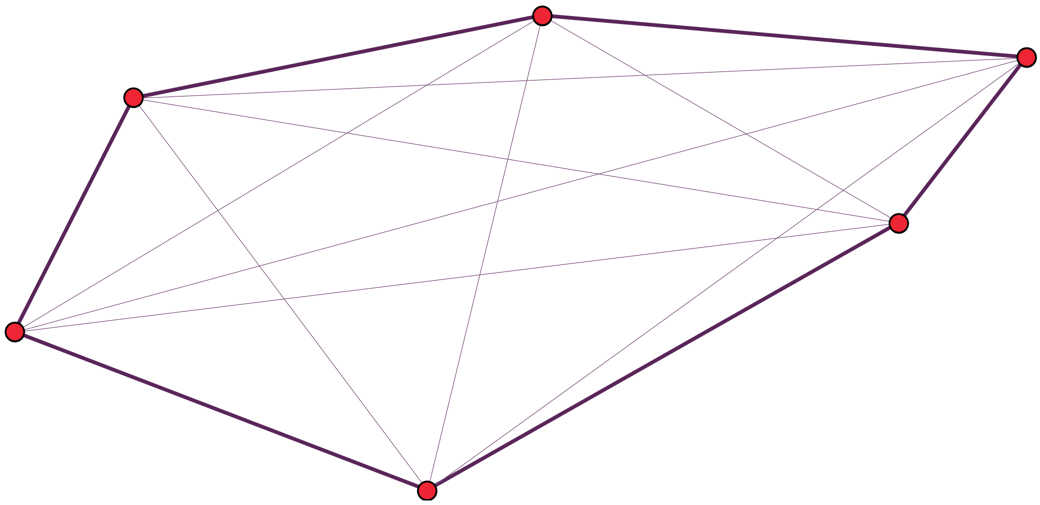

Figura 4.12: Carreteres que uneixen sis pobles.

que sigui l'alumne qui ho descobreixi; res s'aprèn millor que allò que un aprèn per si mateix. El problema ofereix també l'oportunitat als alumnes més avantatjats d'obtenir una fórmula tancada. Si considerem n pobles, de cadascun d'ells surten $n-3$ carreteres per construir i, per tant, el total de carreteres pendents de construcció és $\frac{n(n-3)}{2}$. Si volem comptar totes les carreteres, tant les que ja estan construïdes com les que cal construir, quantes n'hi ha? Aquesta variant del problema pot ajudar a exercitar el raonament exposat. Es pot veure que en aquest cas el total és $\frac{n(n-1)}{2}$. La resolució exposada pot ser tractada amb alumnes de segon o tercer curs d'ESO (13a-15a).

Una altra manera consisteix en enfocar el problema des d'un punt de vista combinatori. Entre dos pobles qualssevol hi ha una carretera, per tant, hi ha tantes carreteres com subconjunts de dos pobles es puguin formar amb el total de pobles considerats, és a dir, $\binom{5}{2}$ si considerem 5 pobles. Però com que 5 d'elles ja estaven construïdes el total és $\binom{5}{2}-5$. La quantitat de carreteres que cal construir en el cas de 6 pobles és $\binom{6}{2}-6$ ... També des d'aquest punt de vista podem obtenir una fórmula tancada ja que si tenim n pobles, el total de carreteres és $\binom{n}{2}$, però com que n'hi ha n de construïdes la quantitat demanada és $\binom{n}{2}-n$.

La visió retrospectiva ens ha conduït al plantejament d'un problema més general que hem resolt per tres camins diferents. Per continuar l'estudi inicial ens preguntem ara per les interseccions entre les carreteres ja que cada intersecció ens obligarà a construir un túnel, pont, rotonda, ...

Problema 4.3.3 *Les carreteres que caldrà construir requeriran de rotondes, túnels o ponts en les seves interseccions. Però, quantes interseccions hi ha?*

El recompte directe torna a ser una bona manera de començar. Així, l'alumne veurà que en el cas de cinc pobles hi ha cinc interseccions i en el cas de sis n'hi ha quinze! (fig. 4.13, pàg. 95).

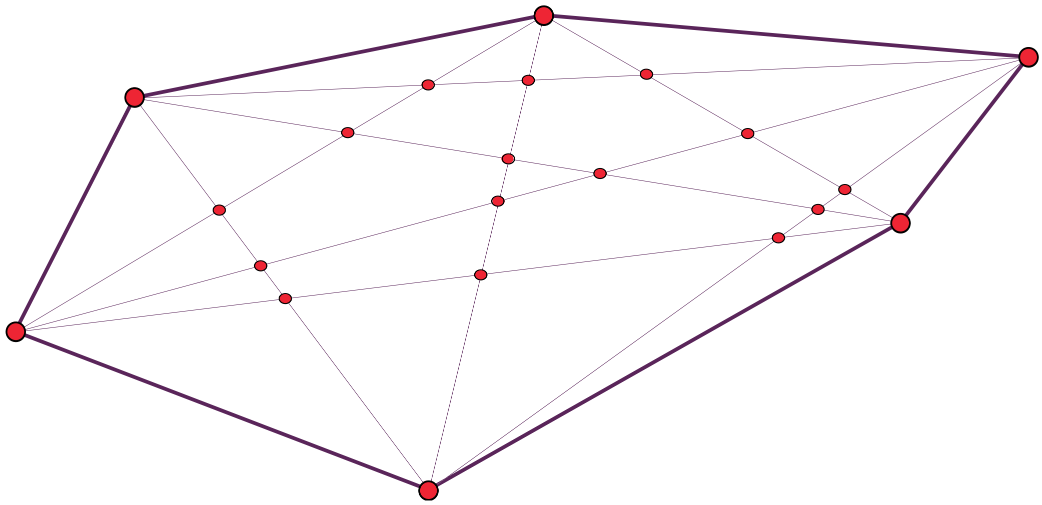

Figura 4.13: Encreuaments entre les carreteres que uneixen sis pobles.

Tornem a estar davant d'un problema en el que tots els alumnes poden experimentar i comptar la quantitat d'interseccions. Podria succeir que la situació dels pobles fes que tres carreteres es trobessin en un mateix lloc. Suposarem que no és així per concloure en un pressupost que doni un preu màxim. Efectuada la part experimental els alumnes poden tenir dificultats per continuar; probablement aquest problema s'haurà de reemprendre uns anys després. De la mateixa manera que abans, la resolució del problema ens permet arribar a establir una fórmula tancada; com?

Cada intersecció és el tall de dues carreteres i cada carretera uneix dos pobles. Així, cada quatre pobles determinen una intersecció. Per tant, quants subconjunts de quatre elements podem formar amb el total de pobles? En el cas de cinc pobles tenim $\binom{5}{4} = 5$ interseccions, en el cas de sis pobles $\binom{6}{4} = 15$ i en general per n pobles tenim $\binom{n}{4}$ interseccions. Aquesta resolució requereix coneixements de combinatòria. Uns anys després l'alumne podrà, per tant, resoldre aquesta part del problema per mètodes combinatoris. Tot i així, aquí li ha nascut la necessitat!

També podem resoldre el problema mirant que succeeix quan afegim un poble. Si les carreteres que uneixen una determinada quantitat de pobles es tallen en una certa quantitat de punts, ens preguntem què succeeix en afegir un poble més. Això ens proporcionarà una recurrència que ens conduirà a una fórmula tancada.

Convido el lector a mirar de fer aquesta resolució[8]. Tal com veureu és molt més que interessant...

Hem obtingut el total de carreteres així com també el total d'encreuaments.

Problema 4.3.4 *I, quants quilòmetres de carretera caldrà construir?*

El treball experimental amb Cabri-Géomètre, una miniaplicació de JAVA o una altra equivalent poden permetre a l'alumne obtenir resultats aproximats sobre el quilometratge que caldrà construir.

Per un càlcul més precís hem de conèixer dades que determinin la posició dels pobles. Segons quina sigui aquesta posició resoldrem el problema fent ús del Teorema de Pitàgores i/o del Teorema del Cosinus. L'exposició a l'aula encertaria per començar amb un cas particular on el Teorema de Pitàgores fos suficient (fig. 4.14, pàg. 96). La posició general dels pobles introdueix la resolució de triangles no rectangles i, per tant, ens porta a la generalització del Teorema de Pitàgores, el Teorema del cosinus.

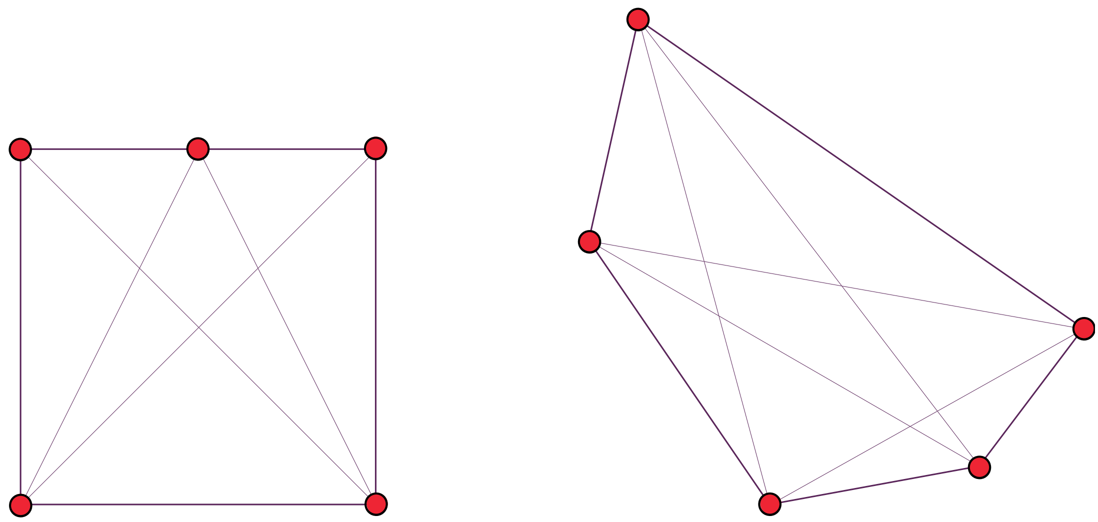

Figura 4.14: Pel càlcul de les longituds a vegades és suficient el Teorema de Pitàgores i en altres cal el Teorema del Cosinus.

Procedint d'aquesta manera haurem calculat la quantitat de carreteres que fa falta construir, els punts d'intersecció entre aquestes i el seu quilometratge, però, hi ha algun altre tipus de construccions per considerar?

[8]En el context ja exposat suposeu que teniu n punts sobre un cercle i n'afegiu un altre. Quants punts es generen en traçar una nova diagonal?...

Problema 4.3.5 *Hi ha alguna construcció que tot i no ser òptima (des del punt de vista del conductor) calgui ser considerada per adjuntar-la a l'estudi?*

La resposta matemàtica ens donarà la comunicació òptima atenent a la distància recorreguda pel conductor, és a dir, es podrà anar d'un poble a un altre seguint un recorregut mínim. En altres paraules, el cas tractat minimitza el temps de viatge pel conductor però necessita una important construcció de via i el cost econòmic pot ser elevat. A més, en la carretera podem trobar més d'una rotonda i el cost pot ser elevat. Considerem per tant altres possibilitats atenent, per exemple, al criteri de minimitzar el nombre de rotondes. Mirem de fer una construcció amb una sola rotonda cedint a l'alumne l'experimentació amb llapis i paper (fig. 4.15, pàg. 97).

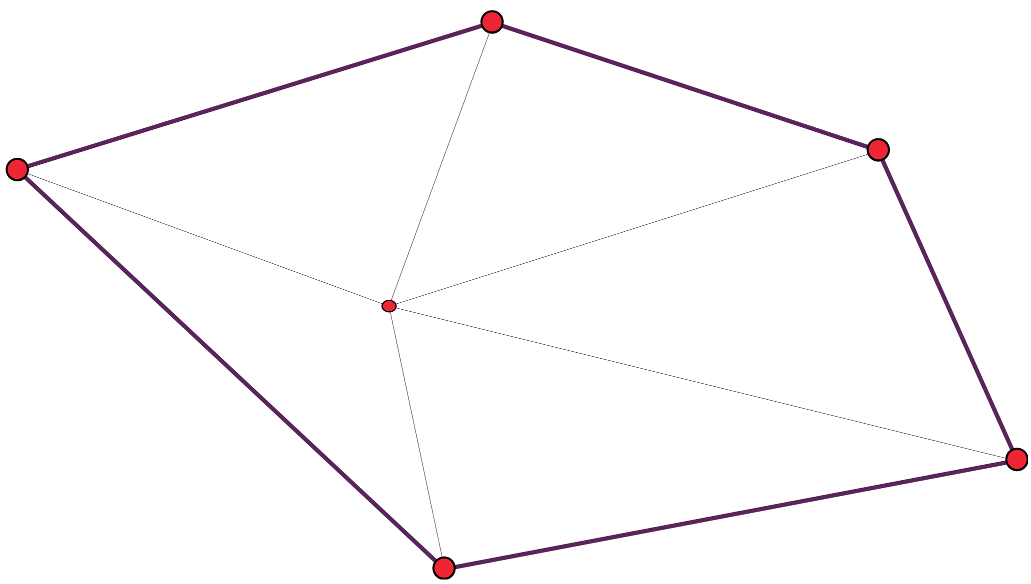

Figura 4.15: L'experimentació amb llapis i paper pot ser un pas previ que justifiqui la necessitat de conjecturar fent ús de l'ordinador.

Després que els alumnes hagin experimentat amb llapis i paper és un bon moment per posar en joc aquesta miniaplicació de cabri[9]. En ella els alumnes podran veure la suma de les distàncies del punt que simbolitza la rotonda als vèrtexs que simbolitzen els pobles i, així podran experimentar i potser conjecturar[10].

[9]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/alternat.htm`

[10]En considerar inicialment tres pobles la resolució d'aquest apartat respon al problema de Fermat-Torricelli.

Si considerem n pobles, el problema consisteix a determinar el lloc on cal col·locar la rotonda per tal que el quilometratge de carretera a construir sigui mínim.

També és raonable considerar la construcció de dues rotondes centrals i comunicar els pobles a través d'elles. En aquest cas se'ns planteja una pregunta anàloga; on cal col·locar-les i com cal comunicar els pobles a través d'elles per tal que el quilometratge de carretera a construir sigui mínim?, i amb tres rotondes?, i amb quatre?...

Abans de continuar és convenient estudiar un cas concret. Prenem quatre pobles que determinen un quadrat de costat $10\,Km$. Observem com varia el quilometratge total a construir si volem minimitzar-lo amb una rotonda o amb dues. Fixem-nos en les figures i preguntem-nos quina respon a la situació que requereix un quilometratge de construcció menor (fig. 4.16, pàg. 98).

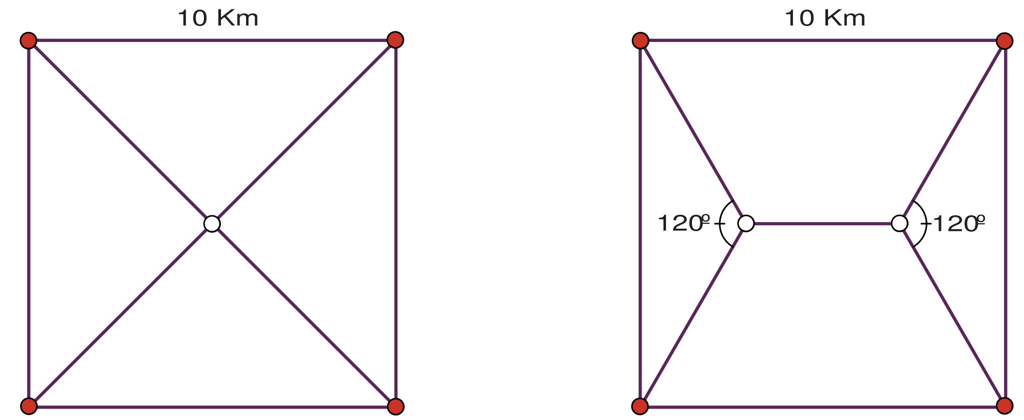

Figura 4.16: El quilometratge de carretera utilitzat amb dues rotondes és $10(1+\sqrt{3})\,Km \simeq 27,32\,Km$, inferior a l'utilitzat amb una rotonda, que és $20\sqrt{2}\,Km \simeq 28,28\,Km$.

La construcció amb dues rotondes requereix un mínim de $27,32\,Km$, mentre que amb una rotonda es requereix $28,28\,Km$ com a mínim; era previsible aquest resultat? En aquesta miniaplicació[11] permet experimentar tot movent la posició de les rotondes.

Comporta un estalvi econòmic optar per dues rotondes en lloc d'una? Amb dues rotondes el quilometratge de construcció és quasi un quilòmetre menor que el que fa falta amb una rotonda. Ara bé, la construcció d'una rotonda també té un cost. Redactarem aquests detalls en l'estudi que ens sol·liciten per tal que qui prengui la decisió en tingui coneixement.

El problema general és l'anomenat problema de la xarxa de carreteres. Donats n pobles es tracta de determinar un sistema connex de segments rectilinis de

[11] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/rotondas.htm`

longitud total mínima, de tal manera que dos punts qualssevol quedin units per una poligonal formada per segments del sistema. Si voleu més informació podeu veure el tractament que fan COURANT i ROBBINS (1979, pàg. 369).

Tot i que el problema general s'escapa dels objectius de l'ensenyament obligatori, la seva experimentació no. Si un alumne es troba per primera vegada a la seva vida amb el problema general a la universitat, estem davant d'un error del sistema. El correcte aprenentatge des de la secundària fins la universitat depèn de moltes variables, però en el que ara ens pertoca, és a la secundària on s'hauria d'iniciar la resolució d'aquests tipus de problemes amplis i creatius; algú ha après a córrer abans que a caminar?

Problema 4.3.6 *Finalment, quin és el pressupost si cada quilòmetre de carretera val X euros i cada rotonda val Y euros?*

Conegut el preu de cada quilòmetre de carretera, el d'una rotonda, pont o túnel i la quantitat de cadascun podem perfilar un estudi pressupostari ben encertat. Els detalls queden en mans del lector.

Entre altres conclusions que es detallen posteriorment cal destacar que aquest problema pot ser resolt de diferents maneres. No totes elles seran assequibles per l'alumne, però sí que faciliten al professor tenir-ne una visió global.*El que realment importava era aconseguir tres punts de vista d'una mateixa qüestió i ser capaç de relacionar-los. Un bon mestre era el que tenia tres bones perspectives, i un sistema per passar de l'una a l'altra (*PLA I CARRERA*, 1998, pàg. 205).*

4.4 ... de l'experimentació prematura al rigor

La hipòtesi general d'aquest treball pren la seva força en la *teoria genètica* de Herbert Spencer[12]. Aquesta considera que les dificultats que ha resolt la humanitat i els problemes que ha hagut de resoldre són paral·lels als que es troba l'estudiant.

Si Fermat s'hagués familiaritzat amb el pas al límit, de ben segur que el càlcul hagués nascut abans. Els problemes tractats per Descartes, Fermat i Huygens van ser encertats des d'un punt de vista geomètric però el pas al límit no apareix en els seus treballs. L'estudi de l'infinitament petit es manifesta com una clara dificultat cap al naixement del càlcul. La teoria genètica defensa, i també ho penso des del moment que aquí ho exposo, que aquestes dificultats històriques són equivalents a les de l'aprenentatge dels nostres alumnes.

Sembla doncs raonable, des d'aquest punt de vista, que l'alumne hauria de familiaritzar-se amb aquest tipus de problemes prematurament. El seu treball

[12]La teoria genètica va prendre la seva màxima força gràcies a la teoria que Darwin va publicar en els seus treballs entre els anys 1842 i 1854.

experimental el conduirà per camins propers als recorreguts pels nostres avantpassats. L'exposició de resultats tancats consisteix en dirigir l'alumne de manera màgica[13], cap als assoliments dels nostres avantpassats, prescindint dels camins que condueixen a ells. L'ensenyament creatiu proposa que sigui l'estudiant qui busqui el camí i, si s'equivoca, en busqui un altre amb la finalitat d'arribar al punt desitjat; l'error és una font d'aprenentatge. El professor guiarà l'alumne per tal que descobreixi els camins ja recorreguts però, potser en alguna ocasió, en trobarem algun d'imprevist. Des d'aquest punt de vista la creativitat està servida.

Si pretenem que els alumnes aprenguin de manera generalitzada el concepte de límit en el mateix curs que aprenen a derivar i/o a integrar tenim el fracàs assegurat[14]. Si interpretem que endarrerir aquest aprenentatge dos anys acadèmics és la solució, però passats els dos anys repetim aquest patró, seguirem tenint el fracàs assegurat. Els grans matemàtics eren ja adults i van necessitar molts anys, i la humanitat força segles, per assimilar certs conceptes. Per aquest motiu considero que l'ensenyament hauria de ser cíclic[15] i que el treball experimental i creatiu amb els grans conceptes s'hauria d'iniciar anys abans de la seva culminació. D'aquesta manera la progressiva maduració intel·lectual de l'alumne permetria introduir de manera natural i gradual grans problemes i resultats.

Vegem el mètode cíclic en un exemple concret. Els alumnes d'entre el segon i el tercer curs d'ESO (13a-15a) acostumen a treballar amb fraccions i amb les seves expressions decimals: exactes o periòdiques (pures o mixtes). Podem aprofitar aquesta situació per introduir-los en el següent problema:

Problema 4.4.1 *Considerem la següent expressió decimal:*

$$0,499999...$$

és igual a $0,5$*?*

- SEGON / TERCER CURS D'ESO (13a-15a)
  És fàcil que pensin que és una mica inferior a $0,5$. En aquest primer moment els podem fer reflexionar; el diàleg és fonamental.

[13]No es fa servir l'adjectiu *màgica* de manera anecdòtica; pensem el següent. Imaginem que presentem a l'alumne un resultat acabat, per exemple, la derivada d'un polinomi. Més enllà del respecte que pugui tenir per la matemàtica i de la seva creença en ella, per què ha de creure més aquests resultats que els que es poden obtenir d'una previsió parapsicològica?

[14]El pla d'estudis vigent en el moment d'escriure aquest treball proposa que aquests conceptes es treballin en el segon curs de batxillerat (17a-18a)

[15]Entenem per mètode cíclic el que consisteix en una construcció gradual i progressiva dels coneixements. Uns mateixos conceptes s'introdueixen en un cert moment i es retorna al seu estudi anys després, a partir dels problemes i motivacions generats prèviament. Aquest mètode ja va ser exposat i defensat, entre d'altres, per PUIG ADAM (1960).

- ¿Pot ser més gran que $0,5$?
  $0,499999...$ mai serà més gran que $0,5$. Aquesta pregunta pot semblar excessivament òbvia però cal formular-la. L'aprenentatge de la matemàtica no pot distanciar l'alumne del seu sentit comú. Si és necessari podem clarificar a través de la seva representació gràfica...
- ¿Pot ser menor que $0,5$?
  Si $0,499999...$ és menor que $0,5$ aleshores existeix un nombre entre ambdós, escollim-ne un. Succeirà que $0,499999...$ en algun moment serà més gran que el que hem escollit entre els dos? Sí, ja que el nombre escollit és menor que $0,5$ i en treure més i més decimals en $0,499999...$, el superarà. Així doncs, no hi ha cap nombre menor que $0,5$ i major que $0,499999...$, per què? Perquè $0,499999... = 5$. [16]

A més, aquest problema aproxima l'aprenentatge de la densitat dels nombres racionals a l'alumne.

- QUART D'ESO / PRIMER DE BATXILLERAT (15a-17a)
  Si els alumnes estan familiaritzats amb les progressions es pot experimentar amb la suma dels primers termes d'una progressió geomètrica de primer terme $0,4$ i raó $0,2$.

  En aquest treball experimental es pot optar per fer servir la calculadora o l'ordinador[17]. Si s'ha construït la fórmula que permet sumar els primers termes d'una progressió geomètrica podrà consolidar el resultat. Sempre existeix una expressió de $0,499999...$ major que qualsevol suma parcial de la progressió. Així doncs, si la suma de la progressió geomètrica és $0,5$ aleshores $0,499999...$ també[18]. El resultat aproximarà de nou l'alumne a veure que efectivament $0,499999...$ s'acosta molt i molt a $0,5$; s'acosta tant com vulguem...

- PRIMER / SEGON DE BATXILLERAT (16a-18a)
  La demostració algebraica no apropa a l'alumne el concepte de límit però li permet veure clarament que si $0,499999...$ és un nombre, aleshores no pot ser cap altre que $0,5$.

  Les dues primeres resolucions introdueixen el concepte de límit. La darrera li assegura, des d'un punt de vista algebraic, quin és el nombre al

[16] Apreciareu que es tracta d'una manera dialogada i simplificada de fer servir la definició de límit d'una successió.

[17] Un full de càlcul ràpidament arrodonirà el resultat a $0,5$.

[18] Aquest raonament introdueix en una edat prematura i amb un exemple elemental una propietat molt utilitzada en la comparació de sèries.

qual s'apropa. Valoreu la diferència entre exposar el concepte de límit després de treballar aquest tipus d'exemples al llarg de tres o quatre anys a intentar exposar-lo directament, sense experimentació prèvia. Si la humanitat va necessitar anys per arribar a aquests conceptes, l'alumne no els pot assimilar, de manera generalitzada, en un o dos.

Moltes altres activitats complementen a aquesta en l'objectiu d'apropar el concepte de límit a l'alumne. Tot i que no sigui aquest concepte objectiu de cursos de secundària obligatòria, sí que ho és el procés de maduració necessari per la seva futura comprensió. Cal sembrar per recollir...

El descobriment de nous teoremes particulars que, en el cas dels grecs, depenia sempre de la «xispa» genial d'imaginació, o bé de la bona sort, passa ara a l'esfera de la competència professional ordinària (HULL, 1973, pàg. 268), en altres paraules, es posa a l'abast dels mortals el que estava reservat pels genis. No és menys cert, per poc que acceptem la teoria genètica (pàg. 99), que la història que va viure el naixement de cada concepte té molt a dir sobre quina és la millor manera d'ensenyar-lo i aprendre'l.

4.5 Inducció en geometria plana

S'exposa tot seguit un exemple d'investigació inductiva en geometria plana. Tal com es formula és una adaptació a la geometria plana d'un problema ja proposat per PÓLYA (1966, pàg. 75). El seu enunciat inicial convida a experimentar fent ús de la particularització, generalització i analogia (pàg. 45) en diverses ocasions.

Permet conjecturar resultats i també solidificar-los. El tractament experimental del problema es pot iniciar en alumnes d'Educació Secundària Obligatòria (12a-16a) i les seves extensions poden tenir sentit en el batxillerat (16a-18a) i en estudis superiors, fins i tot en estudis post-universitaris. Facilita començar amb un tractament inductiu fins arribar a un de deductiu essent el mètode cíclic l'adequat per un ensenyament constructiu i creatiu. Val la pena insistir en què el que a continuació s'exposa pot ser perjudicial si es pretén començar i acabar en un període de temps massa breu, encara que s'ubiqui en un curs post-obligatori. El tractament experimental ha de néixer ben aviat i el rigor ha de créixer poc a poc.

Ometo una exposició sistemàtica sobre l'aplicació del mètode de quatre passos de Pólya o, potser, d'un altre. L'exposició que es fa de cada problema requereix que cada docent l'adapti al seu grup classe atenent la consolidació de les conjectures i/o l'analogia en l'espai; l'atenció al mètode cíclic i el creixement intel·lectual dels nostres alumnes ens ajudaran a decidir.

Problema 4.5.1 *En quantes parts queda dividit el pla per cinc rectes?*

Suposem que les cinc rectes estan situades en una posició general. Això pot donar lloc a un diàleg profitós sobre la posició relativa de cinc rectes en el pla. La idea de posició general és força intuïtiva; es pretén dir que estan situades a l'atzar i, per tant, deixarem de banda situacions particulars com és, per exemple, que dues o més passin per un mateix punt o que es produeixin situacions de paral·lelisme. Els alumnes dibuixaran i amb més o menys encert obtindran que cinc rectes divideixen el pla en setze regions (fig. 4.17, pàg. 103).

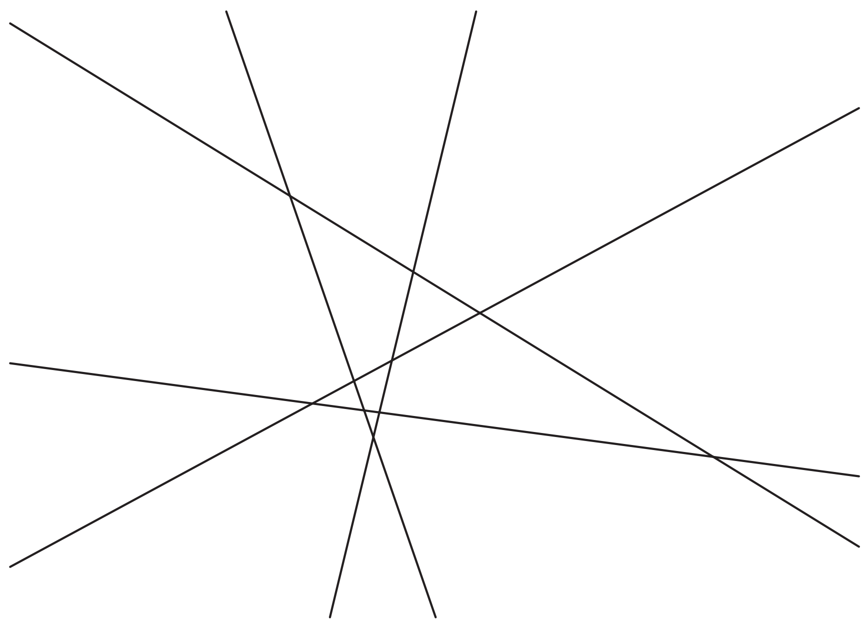

Figura 4.17: Cinc rectes divideixen el pla en setze regions.

Quan han resolt aquest problema és més que bo deixar-los que frueixin dels seus moments d'èxit tot permetent que algun d'ells ho exposi a tota la classe. Una sèrie de preguntes poden sorgir a partir d'aquesta resolució. I amb sis rectes?

Problema 4.5.2 *En quantes parts queda dividit el pla per sis rectes?*

Molt probablement voldran representar de nou i comptar. No els interrompem el recompte directe; aviat veuran la necessitat d'un altre tipus de recompte. Tot i així, probablement encara comptin bé el cas de sis rectes[19]. Imaginem que amb

[19]Cal destacar que la precisió dels programes informàtics no és la que mantenen els alumnes en les seves representacions. Cal estar atents doncs per veure les possibles errades en els dibuixos i recomptes que facin.

sis rectes han fet bé el recompte tot veien que el pla queda dividit en vint-i-dues regions (fig. 4.18, pàg. 104). La pregunta immediata que se'n deriva ells mateixos ens la diran; i amb set rectes? i amb vuit? ...

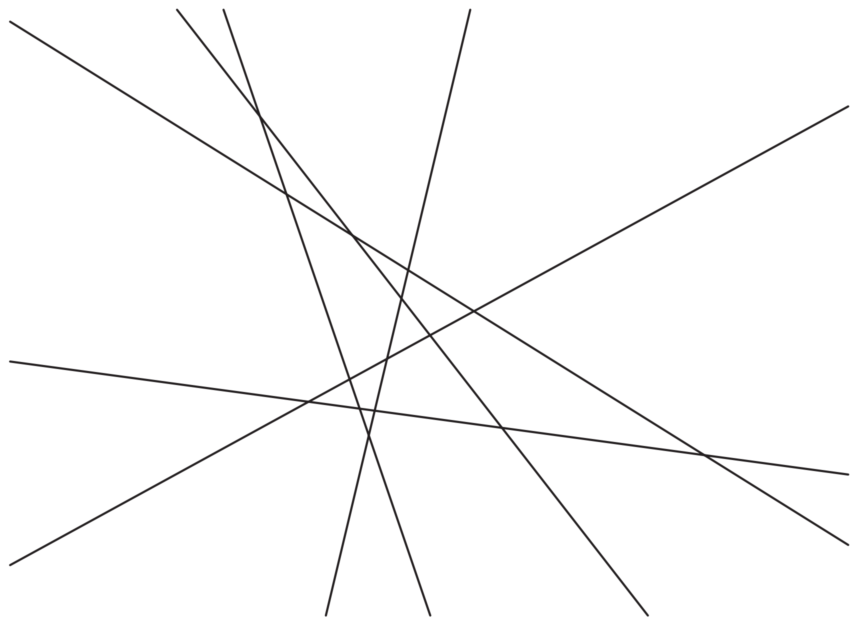

Figura 4.18: Sis rectes divideixen el pla en vint-i-dues regions.

Sembla clar que el recompte directe no serà suficient per saber la quantitat de regions quan considerem un nombre elevat de rectes. Així, coneixem algun problema més fàcil que hi estigui relacionat? Probablement es formularan el mateix problema però amb quatre rectes, amb tres rectes, ... Però, podem enunciar algun problema anàleg que hi estigui relacionat?

Aquest mateix problema es pot formular sobre una recta i també a l'espai. Comencem mirant què diu en el cas que el considerem sobre una recta.

Problema 4.5.3 *En quantes parts queda dividida una recta en situar cinc punts sobre ella?*

Suposem que els cinc punts estan situats sobre la recta en una posició general, és a dir, que són tots diferents. Permetem que els alumnes es facin un esquema gràfic i de ben segur que obtindran que aquests cinc punts divideixen la recta en sis trossos (fig. 4.19, pàg. 105).

Una sèrie de preguntes es desencadenen amb facilitat: I amb sis punts? I amb set? ... Els resultats es poden recollir en una taula (taula 4.1, pàg. 105):

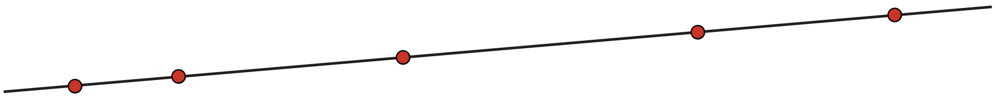

Figura 4.19: Cinc punts sobre una recta la divideixen en sis trossos.

Punts sobre una recta	Trossos en que queda dividida la recta
1 punt	2 trossos
2 punts	3 trossos
3 punts	4 trossos
4 punts	5 trossos
5 punts	6 trossos
6 punts	7 trossos
7 punts	8 trossos

Taula 4.1: Trossos en que queda dividida una recta en situar una determinada quantitat de punts sobre ella.

Sembla que el cas de la recta el tenim controlat. Amb alumnes de segon cicle d'ESO (14a-16a) podem mirar de generalitzar aquest resultat. I si situem n punts sobre la recta, en quants trossos quedarà dividida? $n + 1$.

Tornem al cas del pla. Havíem començat el problema experimentant en quantes regions queda dividit el pla en considerar cinc rectes en situació general i també ho havíem fet amb sis rectes. El recompte directe en el cas de considerar més rectes es fa cada vegada més complicat. Ara per reemprendre l'estudi podem cedir-los l'esbrinar en quantes parts queda dividit el pla en situar-hi quatre, tres, dos o una recta. Recollim les dades que hem obtingut fins ara en la taula 4.2 (pàg. 106):

Podem conjecturar, a la vista de les dades contingudes en la taula 4.2 (pàg. 106), en quantes regions queda dividit el pla en considerar-hi set rectes situades en forma general? I en considerar-n'hi vuit? ...

Si li deixem el temps suficient perquè examini les dades l'alumne veurà que considerant una quantitat determinada d'elements de divisió, el nombre de regions en què queda dividit el pla per rectes més el nombre de trossos en què queda dividida la recta per punts coincideix, quan considerem un element de divisió més, amb el nombre de regions en què queda dividit el pla per rectes. D'aquesta manera es pot completar la taula 4.3 tant com vulguem (pàg. 107).

En la divisió de la recta per punts hem obtingut una fórmula que expressa el nombre de divisions de la recta en funció del nombre de punts diferents que hi considerem en ella, hem construït un resultat.

Quantitat d'elements que divideixen	Quantitat de divisions del pla per rectes	Quantitat de divisions de la recta per punts
1	2	2
2	4	3
3	7	4
4	11	5
5	16	6
6		7
7		8
8		9
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
n		$n+1$

Taula 4.2: Trossos en que queda dividida una recta i regions en que queda dividit el pla en situar una determinada quantitat de punts sobre la recta o de rectes sobre el pla.

Proposició 4.5.1 *Considerem una recta r i n punts diferents situats sobre ella. La quantitat de trossos en què queda dividida la recta pels n punts ve donada per l'expressió $R(n) = 1 + n$.*

Al final de l'ensenyament obligatori i a batxillerat es pot intentar construir una expressió anàloga, un cop ja hem experimentat i conjecturat, pel problema relatiu a trobar la quantitat de seccions en que queda dividit el pla per n rectes situades sobre ell; com?

Treballant a partir de la conjectura anomenem P_{n-1} a la quantitat de regions en que queda dividit el pla per les $n-1$ rectes inicials, P_n a la quantitat de regions en que queda dividit el pla en considerar el total de les n rectes. Hem vist que en sumar P_{n-1} a la quantitat de trossos en que divideixen la recta $n-1$ punts, és a dir a n, obtenim P_n. La conjectura ens diu per tant que $P_n = P_{n-1} + n$. És molt important adonar-se que la conjectura ens marca el camí de la construcció sòlida que es presenta a continuació.

Suposem que tenim $n-1$ rectes sobre el pla situades en forma general. Afegim una altra recta que no sigui paral·lela a cap de les anteriors i que no passi per cap punt de tall entre elles, aconseguint d'aquesta manera que totes n rectes estiguin també en forma general. Aquesta recta que afegim tallarà les $n-1$ anteriors en un punt a cada una, és a dir, en $n-1$ punts. La regió limitada entre cada parell de punts consecutius quedarà dividida en dos, obtenint així $n-2$ regions més. Les dues semirectes que tenen origen en els dos punts dels extrems divideixen, cada una d'elles, una regió no acotada en dues, obtenint dues regions més. Així, en

Quantitat d'elements que divideixen	Quantitat de divisions del pla per rectes	Quantitat de divisions de la recta per punts
0	1	1
1	2	2
2	4	3
3	7	4
4	11	5
5	16	6
6	22	7
7	29	8
8	37	9
...	...	...
n		$n+1$

Taula 4.3: Aplicació de la conjectura realitzada a la taula de dades obtingudes per recompte directe.

afegir aquesta nova recta es generen $(n-2)+2=n$ regions més. Anomenem P_{n-1} a la quantitat de regions en què queda dividit el pla per les $n-1$ rectes inicials i per P_n la quantitat de regions en què queda dividit en considerar el total de les n rectes. Tal com hem vist, $P_n - P_{n-1} = n$ o, expressat d'una altra manera, $P_n = P_{n-1} + n$.

La conjectura ens ha marcat el camí cap a la construcció ferma d'aquesta fórmula recurrent. Anem ara a veure com podem construir una fórmula compacta a partir d'aquesta expressió recurrent. D'aquesta manera podrem obtenir el nombre de regions en que queda dividit el pla per n rectes sense necessitat de conèixer el nombre de regions en que queda dividit el pla per una quantitat de rectes inferior a n (taula 4.4, pàg. 107).

$$
\begin{array}{ccccc}
P_n & - & P_{n-1} & = & n \\
P_{n-1} & - & P_{n-2} & = & n-1 \\
P_{n-2} & - & P_{n-3} & = & n-2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
P_3 & - & P_2 & = & 3 \\
P_2 & - & P_1 & = & 2 \\
P_1 & - & P_0 & = & 1 \\
\hline
P_n & - & P_0 & = & 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n
\end{array}
$$

Taula 4.4: Construcció d'una fórmula compacte a partir d'una expressió recurrent.

Tenim, per tant, que $P_n = P_0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$. Si els alumnes estan familiaritzats amb la suma dels primers termes d'una progressió aritmètica (secció 2.1.1, pàg. 23) aleshores podran expressar-ho com $P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$.

En el moment de reemprendre aquest problema a batxillerat (16a-18a) o posteriorment, si l'alumne està familiaritzat amb el càlcul combinatori aleshores podrà mostrar aquesta expressió com $P_n = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$. De la mateixa manera es pot expressar amb nombres combinatoris el resultat obtingut en el problema anàleg sobre la recta (proposició 4.5.1, pàg. 105).

Hem obtingut una fórmula que expressa el nombre de regions en que queda dividit el pla en funció del nombre de rectes situades en forma general que hi considerem en ella.

Proposició 4.5.2 *Considerem n rectes situades sobre un pla en forma general (dues o més d'elles mai són paral·leles i tampoc tres o més d'elles passen per un mateix punt). La quantitat de regions en que queda dividit el pla per aquestes n rectes ve donada per l'expressió $P_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$.*

El problema es pot deixar aquí. Tot i així també ens podríem formular el problema anàleg a l'espai[20]. Podem començar per veure directament en quantes regions divideixen l'espai tres plans, i dos?, i un? Fins a quatre plans i amb una mica de concentració una part important de l'alumnat podrà treure conclusions que es resumeixen en la taula 4.5 (pàg. 109):

A la vista d'aquestes dades, podem conjecturar en quantes regions queda dividit l'espai en considerar-hi n plans situats en forma general[21]? Deixem que siguin els alumnes els qui examinin la taula 4.5 (pàg. 109) per tal que conjecturin el cas general...

De manera anàloga al raonament fet en el pla (pàg. 105), per una quantitat determinada d'elements de divisió, el nombre de regions en què queda dividit l'espai per plans més el nombre de regions en què queda dividit el pla per rectes coincideix, quan considerem un element de divisió més, amb el nombre de regions en què queda dividit l'espai per plans. D'aquesta manera es pot completar la taula 4.5 tant com vulguem (pàg. 109).

Podem conjecturar una fórmula que expressi la quantitat de divisions de l'espai en funció del nombre de plans que considerem?

---

[20]Pólya formula inicialment el cas de l'espai i per analogia treballa els altres problemes (PÓLYA, 1966, pàg. 75). Sota la meva modesta opinió, a secundària no és una bona opció començar pel problema en l'espai, només potser a segon de batxillerat i si el docent considera l'alumnat habituat a la resolució de problemes per analogia.

[21]n plans estan en forma general si no n'hi ha dos o més d'ells que siguin coincidents, no n'hi ha tres o més d'ells que es tallin en una mateixa recta i no n'hi ha quatre o més d'ells que es tallin en un mateix punt.

Quantitat d'elements que divideixen	Quantitat de divisions de l'espai per plans	Quantitat de divisions del pla per rectes	Quantitat de divisions de la recta per punts
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11	5
5		16	6
6		22	7
7		29	8
8		37	9
...	...	...	...
n		$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$	$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}$

Taula 4.5: Trossos en que queda dividida una recta, regions en que queda dividit el pla i regions en que queda dividit l'espai en situar una determinada quantitat de punts sobre la recta, rectes sobre el pla o plans en l'espai.

Conjectura 4.5.1 *Considerem n plans a l'espai situats en forma general (veure el peu de pàgina 21, pàg. 108). A la vista de la taula 4.5 (pàg. 109), conjecturem que la quantitat de regions en què queda dividit l'espai per aquests n plans coincideix amb el nombre de regions en què queda dividit amb $n-1$ plans més el nombre de regions en què queda dividit el pla amb $n-1$ rectes. A la vista de la taula 4.5, podem sospitar que en general tenim $E_n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$.*

Aclarim la terminologia. Anomenem E_{n-1} a la quantitat de regions en què queda dividit l'espai per $n-1$ plans, E_n a la quantitat de regions en què queda dividit l'espai per n plans i P_{n-1} a la quantitat de regions en què queda dividit el pla per $n-1$ rectes. La conjectura ens diu que $E_n = E_{n-1} + P_{n-1}$. No es tracta d'un argument sòlid, però a partir de la idea que ens aporta aquesta conjectura raonem de manera ferma.

Considerem $n-1$ plans que es tallen en forma general determinant E_{n-1} regions. Afegim un pla de manera que tots n també estan en forma general. Aquest pla talla els $n-1$ anteriors determinant n regions més (si aquest raonament ofereix dubtes hem de tornar a experimentar).

A més, el pla que afegim talla cada grup de dos plans (dels $n-1$ que ja teníem) determinant una nova regió. Obtenim, per tant, $\binom{n-1}{2}$ noves regions. D'ambdós raonaments tenim:

$E_n = E_{n-1} + \binom{n-1}{2} + n$

$E_n = E_{n-1} + \binom{n-1}{2} + (n-1) + 1$
$E_n = E_{n-1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}$

De nou la conjectura ens ha marcat el camí cap a la construcció ferma d'una fórmula recurrent. A partir d'aquesta anem a construir una fórmula compacta que ens permetrà obtenir el nombre de regions en què queda dividit l'espai per n plans sense necessitat de conèixer el nombre de regions en què queda dividit l'espai per una quantitat inferior de plans (taula 4.6, pàg. 110).

$$\begin{array}{cccccc}
E_n & - & E_{n-1} & = & \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \\
E_{n-1} & - & E_{n-2} & = & \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{0} \\
E_{n-2} & - & E_{n-3} & = & \binom{n-3}{2} + \binom{n-3}{1} + \binom{n-3}{0} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
E_6 & - & E_5 & = & \binom{5}{2} + \binom{5}{1} + \binom{5}{0} \\
E_5 & - & E_4 & = & \binom{4}{2} + \binom{4}{1} + \binom{4}{0} \\
E_4 & - & E_3 & = & \binom{3}{2} + \binom{3}{1} + \binom{3}{0} \\
E_3 & - & E_2 & = & \binom{2}{2} + \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \\
E_2 & - & E_1 & = & \binom{1}{1} + \binom{1}{0} \\
E_1 & - & E_0 & = & \binom{0}{0} \\
\hline
E_n & - & E_0 & = & \begin{array}{c} \left(\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \cdots + \binom{n-1}{0}\right) + \\ \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n-1}{1}\right) + \\ \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}\right) \end{array}
\end{array}$$

Taula 4.6: Construcció d'una fórmula compacte a partir d'una expressió recurrent. Cas anàleg a l'exposat en la taula 4.4

$$E_n = E_0 + \left(\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \cdots + \binom{n-1}{0}\right) + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2}\right)$$

Fixem-nos en cadascuna d'aquestes sumes que podem obtenir per aplicació d'una propietat del triangle de Pascal [22].

$\binom{0}{0} + \binom{1}{0} + \cdots + \binom{n-1}{0} = 1 + 1 + \cdots + 1 = n = \binom{n}{1}$
$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n-1}{1} = \binom{n}{2}$
$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{3}$

Substituint el valor d'aquestes sumes obtenim el que estàvem cercant:

$E_n = E_0 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$

[22] Una propietat del triangle de Pascal que es pot treballar a l'aula des de l'experimentació fins la seva consolidació diu que $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$.

$E_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$[23]

Hem provat que la conjectura és certa i hem consolidat una fórmula. L'enunciem, per tant, en forma de proposició.

Proposició 4.5.3 *Considerem n plans a l'espai situats en forma general (veure el peu de pàgina 21, pàg. 108). La quantitat de regions en que queda dividit l'espai per aquests n plans ve donada per l'expressió $E_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.*

La taula 4.7 (pàg. 111) conté els resultats obtinguts. Podríem deixar aquest estudi aquí tot i que ara estem en condicions de conjecturar el problema anàleg que es deriva de considerar dimensions superiors...

Quantitat d'elements que divideixen	Quantitat de divisions de l'espai per plans	Quantitat de divisions del pla per rectes	Quantitat de divisions de la recta per punts
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	11	5
5	26	16	6
6	42	22	7
7	64	29	8
8	93	37	9
...	...	...	...
n	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}$	$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}$

Taula 4.7: Recull dels resultats obtinguts en la resolució dels problemes de l'apartat 4.5.

L'ensenyament de la matemàtica a partir de l'exposició de resultats tancats i acabats començaria exposant aquest resultat (proposició 4.5.3) i demanant una prova i/o aplicacions d'ell. El lector podrà veure la diferència entre ambdós estils d'ensenyament i l'esperit de construcció i creativitat que hi ha en el que s'ha exposat.

4.6 Representació d'un problema i traducció

En els problemes que s'han resolt hem vist que sovint la representació esquemàtica del que ens exposa el problema és la clau per a la seva resolució. En el problema

[23] $E_0 = 1$ ja que si a l'espai no hi col·loquem cap pla aleshores queda dividit en una regió, que és tot l'espai.

que feia referència a la suma dels nombres senars (secció 2.1.1, pàg. 23) si l'alumne agafa els resultats i els mira d'organitzar geomètricament el problema es simplifica de manera notable (pàg. 26). En el problema relatiu a la successió de Fibonacci (secció 2.1.2, pàg. 30) la representació dels resultats en una taula permet visualitzar el comportament d'aquests i treure conclusions (pàg. 32). De la mateixa manera en el problema proposat per Krulik (secció 3, pàg. 35) la visualització de les dades en una taula (pàg. 36) ens permet obtenir solucions intuïtives. En el problema que va sortir en la prova PISA i que s'estudia en aquest treball (secció 4.2, pàg. 82) les representacions gràfiques són fonamentals en moltes ocasions. Hi ha un llarg etcètera tant en aquest treball com en problemes que podem trobar en altres llocs que permeten concloure el fonamental que és representar adequadament un problema.

Una representació gràfica adequada ens permet optar per allò que és essencial en el problema fent que destaqui per sobre d'allò que no ho és tant. *Representar, esquematitzar, és abstreure. És prescindir de qualitats accessòries per quedar-se amb la qualitat fonamental destacada en cada representació* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 111). La resolució de problemes fent ús de representacions s'ha de treballar des d'edats prematures. Entre d'altres les operacions aritmètiques bàsiques, el treball amb nombres primers, les fraccions, la proporcionalitat i les congruències permeten representacions gràfiques que traslladen el context d'un problema a un esquema molt més proper al sentit comú de l'alumne tal com exposa PUIG ADAM (1956, pàgs. 9-44).

Les traduccions d'un problema matemàtic des d'un punt de vista a un altre no és només una estratègia pedagògica per facilitar l'aprenentatge de l'alumne. El programa Langlands[24] busca una unitat que hi ha en el fons de vàries disciplines matemàtiques. El 1967, a 31 anys, Robert Langlands proposava que la matemàtica de l'àlgebra i la de l'anàlisi estaven íntimament lligades. Aquest enfoc del món de la matemàtica s'ha viscut en el llarg camí cap a la demostració del teorema de Fermat on *l'esperança era que teoremes sense solució en teoria de nombres poguessin ser resolts examinant el corresponent problema en geometria diferencial* (SINGH, 2004, pàg. 229).Si aquestes traduccions són d'utilitat per la matemàtica i acceptem la teoria genètica (pàg. 99), aleshores també ho són pel seu ensenyament.

Per tal d'il·lustrar aquest apartat parlaré de la introducció dels nombres primers a l'ensenyament. Es pot optar per definir el que és un nombre primer i fer un treball que no es mogui de l'àmbit aritmètic. D'aquesta manera la traducció a altres llenguatges no haurà existit. Es pot optar, en canvi, per manipular ob-

[24] El programa Langlands pren el nom del matemàtic canadenc que el 1967 va formular per primer cop conjectures sobre la correspondència entre la Teoria de Nombres i l'Anàlisi mitjançant les representacions de Galois.

jectes, mirant de representar cada nombre per rectangles formats per la quantitat d'objectes que ens indica el nombre (fig. 4.20, pàg. 113).

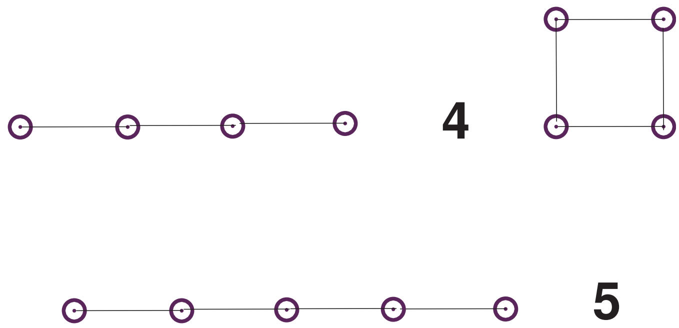

Figura 4.20: Si una quantitat d'objectes es pot organitzar en forma de rectangle de manera que ambdós costats siguin superiors a 1 aleshores el nombre que utilitzem per indicar aquesta quantitat és compost.

Aquesta experimentació ens conduirà al concepte de nombre primer i posteriorment a la descomposició factorial d'un nombre. Haurem fet la traducció d'un enunciat aritmètic a un llenguatge geomètric, manipulable i proper a l'alumne. Si ens preguntem com es distribueixen els nombres primers sembla que hem de deixar la pregunta per molt més endavant, però si ho fem, quan arribi el moment no haurà nascut prèviament aquesta qüestió en l'alumne i el sorprendrem. Ens podem proposar de representar els nombres de la manera següent:

Escrivim el número dos, i el tres el posem a sobre del dos perquè és un nombre primer, el quatre a la dreta perquè és compost, etc. Aquesta activitat generarà una representació dels nombres naturals en la que l'altura ve donada per la quantitat de nombres primers i l'amplada per la de nombres compostos. Haurem familiaritzat l'alumne amb la distribució dels nombres des d'un punt de vista gràfic.

Les representacions tenen un paper fonamental en tota la matemàtica però cal destacar el que tenen en l'estudi de les funcions. Una funció es pot donar en diferents llenguatges. Tots aquests llenguatges són importants i el que caldria prioritzar és la traducció de l'un a l'altre. De fet cadascun d'aquests llenguatges té els seus avantatges així com les seves limitacions i a vegades el fonamental consisteix en traduir a un altre llenguatge on hi hagi més avantatges i menys limitacions. JANVIER (1987) treballa amb quatre maneres de representar una funció:

1. Descripció verbal (DV).

2. Taula de valors (TV).

3. Gràfic (G).

4. Fórmula (F).

L'ensenyament de les funcions hauria de prioritzar, des dels seus inicis, l'estudi a través d'aquests quatre llenguatges (taula 4.8, pàg. 114).

De / A	DV	TV	G	F
DV	-	Prendre valors	Realitzar el gràfic qualitatiu	Determinar el model
TV	Interpretació	-	Representar punts	Interpolar
G	Lectura d'un gràfic	Determinar coordenades	-	Determinar la fórmula que pot tenir la funció a partir del seu gràfic
F	Descripció del tipus de fórmula	Donar valors	Representar el gràfic a partir de la fórmula	-

Taula 4.8: Traducció entre els diferents llenguatges en què pot ser donada una funció.

En ocasions la traducció no és directa. Així, d'un llenguatge gràfic podem passar a una taula de valors i d'aquesta a la fórmula. Resoldre numèricament una equació diferencial ens porta d'un enunciat formulístic a una taula de valors, d'aquesta a una representació gràfica i d'aquesta a una descripció verbal. Resoldre una equació de segon grau pot conduir d'una fórmula a una taula de valors...

4.7 Conclusions sobre el plantejament de problemes

Els problemes estudiats, a més de les aportacions d'Arcavi (ARCAVI, 1999, pàg. 51), presenten característiques que són desitjables en tot problema obert. Suposem que tenim un problema rellevant per l'educació constructiva i creativa de l'alumne, com pot ser aquest problema? Sense ànim d'exhaustivitat, en tot o en part, es caracteritza per:

- El problema té un enunciat en el que no intervé cap terminologia matemàtica i en canvi condueix a l'ús d'eines matemàtiques que ajuden a comprendre millor certs fenòmens que ens envolten.

- Plantejar problemes basats en situacions reals que facilitin el diàleg i que siguin acotats en el seu procés de resolució, potser per un tractament parcial.
- Permet un recompte directe però també admet altres tipus de recompte que es fan necessaris quan s'avança en la resolució del problema.
- De les preguntes que sorgeixen del problema, alguns casos particulars poden ser abordats amb els coneixements dels alumnes mentre que d'altres justifiquen la teoria que han d'aprendre.
- El problema fomenta diàleg sobre una situació real on la solució matemàtica pot no ser la més acceptada.
- El problema requereix experimentació en el seu inici i al llarg de la seva resolució. La complexitat amb la que ens trobem demana l'ús de l'ordinador i d'un software adequat: Cabri-Géomètre, Cinderela, GeoGebra, ...
- El problema condueix a conjecturar resultats d'una certa rellevància.

Capítol 5

Sobre la construcció de fórmules i algorismes

Índex

Per què no hauria de ser convenient ensenyar a partir de fórmules i algorismes? Permeten una fàcil i ràpida exposició, en aplicar-los a un problema permeten arribar a la seva solució; segur que són correctes (algú se n'ha assegurat), ...

Aquest tipus d'instrucció prepara els alumnes per tal que siguin *tècnicament hàbils, però no facilita que estiguin acostumats a generar explícitament comprensió i sentit del que s'aprèn* (ARCAVI, 1999, pàg. 41). Si pretenem que la humanitat generi coneixement aleshores haurem d'ensenyar a crear, no a repetir.

La matemàtica és un invent de la humanitat però no és suficient saber-ho, també cal transmetre-ho. La instrucció de fórmules, algorismes i en general de resultats acabats no mostra el procés de creació. *La matemàtica va tenir un origen concret i empíric; va ser aplicada abans que pura* (PUIG ADAM, 1960, pàg. 112). És raonable per tant acceptar que l'educació té una responsabilitat atorgada per la pròpia evolució de la humanitat en fomentar el procés de creació. Acceptem que el docent *hauria de ser capaç de veure les matemàtiques amb els ulls de la intuïció i, molt més difícil encara, de transmetre aquesta manera de mirar* (PLA I CARRERA, 1998, pàg. 206).

Tot això ens porta a establir com objectiu essencial ensenyar a *PENSAR* (pàg. IX).

Les visions més crítiques poden entendre que l'aplicació de fórmules i algorismes té resultats inqüestionables mentre que el treball amb conjectures està ple d'errors. Efectivament el treball conjectural condueix sovint a cometre errors, però són errors dels quals ens proposem aprendre per novament conjecturar. Ara bé, per què hi ha tanta resistència a l'error? Potser és la vergonya a cometre'n? Però quan descobrim el que no va bé estem més a prop d'encertar en el que sí que hi va. Si ens proposem corregir els error hem d'ensenyar a través d'ells i el treball conjectural convida en gran mesura a construir el coneixement des d'aquest punt de vista. Tot i els errors, en ocasions obtindrem propietats que sospitem certes i, mentre no hi hagi una prova podrem examinar més casos particulars; *Un resultat general i conjectural obté més crèdit si es verifica en un nou cas particular* (PÓLYA, 1966, pàg. 30).

Són molts els resultats que es donen per fets en l'ensenyament de la matemàtica. Només a títol d'exemple diré que es pot consultar en alguns llibres de text com s'introdueixen operacions amb nombres enters atenent al seu signe de manera instructiva, quan hi ha experiments ben senzills que pedagògicament són molt acceptables ja que apropen els resultats al sentit comú de l'alumne. Aquest exemple s'ha posat pensant en l'Ensenyament Secundari Obligatori però n'hi ha d'altres. Així, els recomptes combinatoris es poden introduir també des d'un punt de vista experimental, i en aquest cas es tracta d'un ensenyament impartit principalment a batxillerat (16a-18a). El currículum de matemàtiques dels estudis superiors també admet punts de partida propers al sentit comú de l'alumne. Una bona colla de propostes les exposa (PUIG ADAM, 1956, pàgs. 40-66) atenent aspectes del currículum aplicables a diferents etapes educatives. Aquests punts de partida res tenen a veure amb donar o no donar rigor als resultats finals i, en canvi, molt tenen a veure amb crear en els estudiants la inquietud necessària per un aprenentatge creatiu.

La història de la matemàtica és molt pròdiga en errors comesos per matemàtics de primera fila en intentar demostrar teoremes importants. Però és notable que en alguns casos ha calgut esperar un temps perquè es descobrissin i molt més perquè es resolguessin tal com diu (HERNÁNDEZ, 1991, pàg. 52). Permeteu-me exposar una coneguda anècdota que exemplifica la interpretació que la ciència ha fet de l'error. Probablement l'invent més destacat de Thomas Alva Edison va ser la bombeta. Després de centenars d'intents va aconseguir que un fil assolís la incandescència sense fondre's. Quan li van preguntar pels successius fracassos Edison va respondre: *Fracassos? No sé de què em parles. En cada descobriment em vaig adonar d'un motiu pel qual una bombeta no funcionava. Ara ja sé mil maneres de com no s'ha de fer una bombeta.*

5.1 Erudició versus construcció

Imaginem que ens proposem introduir el càlcul de l'àrea d'un cercle en alumnes que ja han construït fórmules per determinar l'àrea de diferents polígons tal com es pot veure en (PUJOL i ÁLVAREZ, 1997, pàgs. 31-40). L'acció educativa pot seguir diferents camins:

1. Instrucció. El docent dóna la fórmula i proposa exercicis d'aplicació.

2. Deducció. El docent no podrà en un curs de secundària obligatòria oferir una deducció completa. Aquest tipus de raonament no només no és adequat per les edats dels alumnes de secundària sinó que no construeix coneixement. La funció de l'estil deductiu és solidificar els coneixements prèviament construïts.

3. Inducció. A partir del treball amb descomposicions del cercle s'arriba a una conjectura[1].

Aquest tipus de decisions han de ser preses sovint pel docent. La instrucció no aporta creativitat de cap tipus i no respecta l'objectiu principal establert al principi d'aquest article. La deducció consolida resultats preestablerts, però no els crea. La construcció plausible de fórmules és una opció creativa que, tot i que no dóna solidesa als resultats, facilita la participació de l'alumnat i adoba el terreny per tal que en un futur hi hagi contingut per consolidar.

Problema 5.1.1 *Calcula l'àrea limitada per un arc de cicloide[2] (fig. 5.1, pàg. 119).*

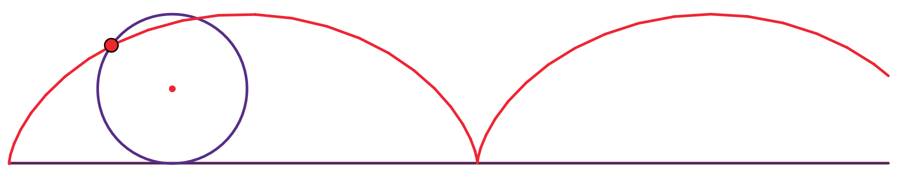

Figura 5.1: La cicloide és la corba que descriu un punt d'una circumferència quan aquesta roda per sobre d'una línia recta.

[1] Coneguda és la descomposició d'un cercle en sectors circulars que permet reconstruir-lo formant una figura geomètrica que més s'assembla a un paral·lelogram, com més gran sigui el nombre de descomposicions.

[2] Anomenem cicloide a la corba plana descrita per un punt d'una circumferència quan aquesta roda per una línia recta.

Podem optar per donar una fórmula pel seu càlcul, pensar en una deducció rigorosa o optar per una construcció plausible. Gilles Roberval va fer una construcció amb l'anomenat mètode dels indivisibles, comprensible per l'alumne i que, sense forçar-ho, li facilitarà el posterior aprenentatge del concepte de integral[3].

Considerem mitja cicloide que es genera amb mitja revolució d'un cercle (fig. 5.2, pàg. 120). Dividim per la meitat el cercle generatriu que restem de l'àrea de la cicloide (fig. 5.3, pàg. 120). Considerem l'àrea del semicercle com un conjunt de línies paral·leles i horitzontals. Per restar l'àrea del semicercle fem una paral·lela de cada línia en l'interior de la mitja cicloide.

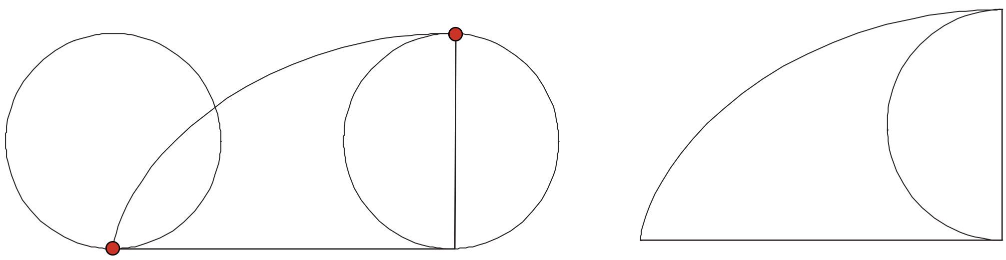

Figura 5.2: Mitja cicloide es genera amb mitja revolució d'un cercle.

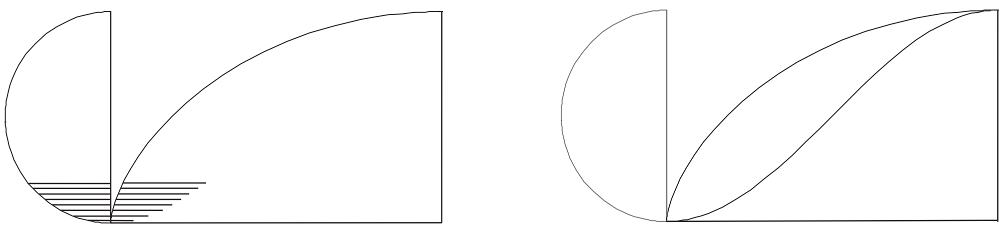

Figura 5.3: Restem mig cercle generatriu de l'àrea de la cicloide.

L'àrea de la superfície limitada entre la nova corba i l'arc de cicloide coincideix amb l'àrea del semicercle; per tant és $\frac{1}{2}\pi r^2$. Per obtenir l'àrea de la superfície limitada per la nova corba, fem una còpia de la original i entre ambdues formem un rectangle[4] (fig. 5.4, pàg. 121).

L'altura d'aquest rectangle és el diàmetre de la circumferència generatriu i la base és la meitat de la seva longitud (fig. 5.5, pàg. 121). L'àrea del rectangle és

[3] *The Open University* ha divulgat gran quantitat de construccions rellevants des del punt de vista històric i que permeten desenvolupaments constructivistes i creatius en la classe de matemàtiques.

[4] Que aquestes dues figures encaixin formant un rectangle hauria de ser demostrat rigorosament però és plausible acceptar-ho en alumnes d'ensenyament secundari.

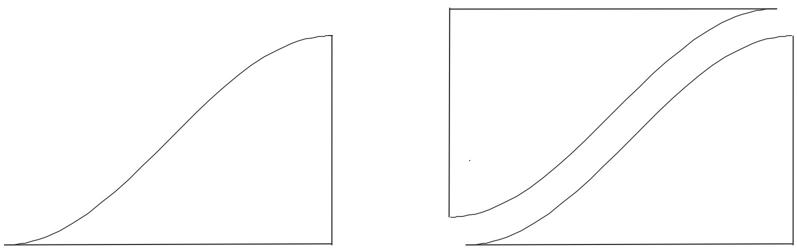

Figura 5.4: Fem una còpia de la figura obtinguda i entre ambdues construïm un rectangle.

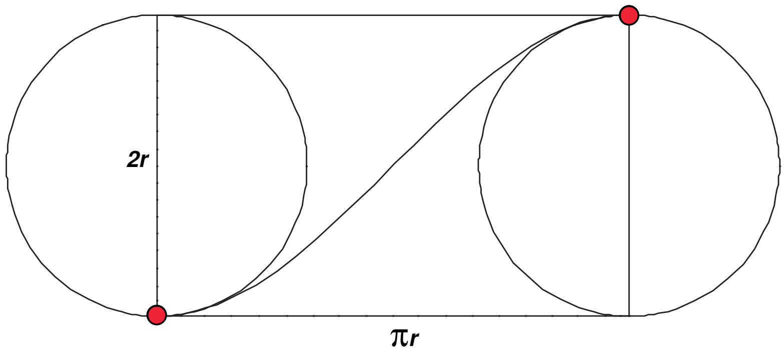

Figura 5.5: L'altura del rectangle obtingut és el diàmetre de la circumferència generatriu i la base és la meitat de la seva longitud.

$2\pi r^2$. L'àrea de mitja cicloide és, per tant, $\frac{1}{2}\pi r^2 + \pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. L'àrea d'un arc de cicloide és dues vegades aquesta àrea, és a dir, $3\pi r^2$. Finalment, l'àrea d'un arc de cicloide és tres vegades l'àrea d'un cercle generatriu[5].

Roberval tenia mètodes com aquest per resoldre problemes sobre àrees de corbes i per trobar tangents, però sempre va mantenir en secret els seus treballs. Va ser Mersenne qui va desvetllar els seus secrets i els dels savis del seu temps.

[5]Els gràfics d'aquest apartat els he realitzat amb *Mathematica* exportant el resultat a format *metafile* i fent els darrers retocs amb *Ilustrator*. He treballat amb equacions paramètriques amb el paràmetre $t \in [0, \pi]$. He treballat amb les equacions de la cicloide $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(t - \sin t) \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \end{array}\right.$ i amb les del semicercle $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi}{2} - t) \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(\frac{3\pi}{2} - t) \end{array}\right.$. D'ambdues i restant a l'àrea del cicloide la del semicercle amb el mètode dels indivisibles he obtingut una nova corba d'equacions $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t}{2} \\ y = \frac{1}{2}(1 - \cos t) \end{array}\right.$. Aquestes són les equacions que m'han permès realitzar les representacions amb *Mathematica*.

5.2 Les quadratures: exhaustió, indivisibles i mètodes algebraics

A finals del segle XVI es van realitzar traduccions al llatí de les obres d'alguns matemàtics grecs i això va facilitar que es reemprengués l'estudi geomètric sobre el càlcul d'àrees i volums de figures geomètriques. Abans del naixement del càlcul infinitesimal, els problemes de quadratures s'havien tractat, a grans trets, des de tres punts de vista. Que el càlcul nasqués en el segle XVII es deu a un procés de maduració intel·lectual en l'àmbit matemàtic en el qual hi van influir les investigacions i els resultats d'aquell moment les quals van ser conseqüència d'altres anteriors... Que l'ensenyament i l'aprenentatge del càlcul arribi als nostres alumnes requereix no ignorar les dificultats i els camins que van seguir els nostres avantpassats.

La concepció pitagòrica dels nombres està directament lligada a les magnituds geomètriques. La concepció pitagòrica de nombre equival al que en el nostre llenguatge entenem per nombre enter. Durant molt de temps van pensar que un cop establerta una unitat de mesura i les seves parts fraccionàries es disposava d'un conjunt numèric que permetia mesurar qualsevol magnitud. Com que entre dues fraccions se'n pot construir una i podem iterar el procés indefinidament, sembla raonable pensar que amb aquests nombres es pot assolir qualsevol mesura. El descobriment de la *incommensurabilitat*[6] de la diagonal del quadrat per part dels pitagòrics[7] va suposar una profunda crisi en les concepcions matemàtiques dels grecs; la teoria pitagòrica de les proporcions és estrictament geomètrica. Posteriorment, la teoria de les proporcions d'Èudox, que Euclides va integrar en els seus *Elements*, va anar més enllà del que és estrictament geomètric donant resposta al problema de la *incommensurabilitat*. Els nombres irracionals van néixer a partir de la superació d'aquesta crisi.

Si tantes dificultats va tenir el naixement dels nombres irracionals potser és raonable acceptar que es tracta d'un aprenentatge difícil pels nostres alumnes. Però, probablement els estudiants es troben amb els nombres irracionals abans que n'hagin capçat la necessitat? Potser no reviuen prou els conflictes que ha viscut la humanitat i l'evolució de les idees que van conduir als nombres irracionals?

Respecte el càlcul d'àrees els grecs entenien que calcular l'àrea d'un recinte era trobar el costat d'un quadrat que tingués la mateixa àrea, és a dir, trobar una

[6] Etimològicament el terme *incommensurable* deriva del llatí: *commetiri*=comparar i té, per tant, el sentit de no comparable.

[7] No es coneix amb exactitud el primer moment en què es va reconèixer la *incommensurabilitat*. Proclo en els seus *Comentaris* ho atribueix al propi Pitàgores cap a l'any 480 a.C. Aquest descobriment s'hauria donat en intentar de manera empírica trobar una unitat que permetés mesurar simultàniament la diagonal i el costat d'un quadrat o bé la diagonal i el costat d'un pentàgon regular.

àrea era quadrar-la, d'aquí el nom: problemes de quadratures.

El mètode d'exhaustió que es troba al llibre XII dels Elements d'Euclides s'atribueix a Èudox de Cnidos. Posteriorment, va ser principalment Arquímides qui en va fer ús per determinar àrees de figures curvilínies, volums i longituds. Arquímides, que va ser qui més va fer servir aquest mètode, mesurava la longitud de corbes aproximant-les (exhaurint-les) per mitjà de figures poligonals inscrites i circumscrites.

Com a exemple d'aquest mètode exposo el que va fer Arquímides per trobar una aproximació del número π. Els matemàtics de la Grècia Clàssica ja sabien que la raó entre la mesura d'una circumferència i el seu diàmetre és sempre la mateixa, sigui quina sigui la circumferència, però, ho saben els nostres alumnes? Ho han experimentat? Els alumnes d'una classe poden construir una circumferència i mesurar el seu diàmetre i la seva longitud. A l'aula es poden exposar els resultats recollint-los en una taula. En calcular el quocient entre la longitud i el diàmetre hi haurà diferents resultats, uns més aproximats i uns altres no tant. Fent la mitjana de tots aquests resultats n'obtindrem un que podem acceptar com a primera aproximació del nombre π.

Per tal de donar un exemple del mètode d'exhaustió[8] i fent ús del llenguatge actual adaptaré un problema resolt per Arquímides. Considerem una circumferència de diàmetre $d = 1$, un quadrat inscrit i un de circumscrit (tal com es pot veure en la figura). Com que $d = 1$ tenim que $r = \frac{1}{2}$. Pel teorema de Pitàgores tenim la longitud del costat $\overline{AB}$ del quadrat inscrit que és $\overline{MC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$[9]. El costat del quadrat circumscrit és igual al diàmetre del cercle, per tant, és $\overline{CD} = 1$. El perímetre del quadrat inscrit és $2\sqrt{2}$ i el del quadrat circumscrit 4. Per tant, $\frac{\sqrt{2}}{2} < \pi < 4$ que aproximadament és $2,828 < \pi < 4$ (fig. 5.6, pàg. 124).

Repetint el procediment amb un hexàgon regular inscrit i un altre de circumscrit s'obté que $3 < \pi < 2\sqrt{3}$, que aproximadament és $3 < \pi < 3,464$ (fig. 5.7, pàg. 125).

Arquímides va arribar a veure que $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ aproximadament és $3,1408 < \pi < 3,142857$, és a dir, va obtenir amb correcció les dues primeres xifres decimals.

El treball experimental més aquests arguments que acoten amb rigor el valor de π són tècniques que aproximen el significat d'aquest nombre a l'alumne i també el situen en el context real de creació matemàtica.

Bonaventura Cavalieri va ser un dels primers en desenvolupar, des de principis del segle XVII, un nou mètode de quadratura que dóna resposta a problemes

[8]La resolució d'aquest exemple no es correspon amb el moment històric en què es va donar ja que l'ús dels irracionals en el raonament d'aquest exemple no era acceptat en aquell moment; la crisi dels irracionals encara no s'havia resolt.

[9]Aquesta aportació està treta de context històric.

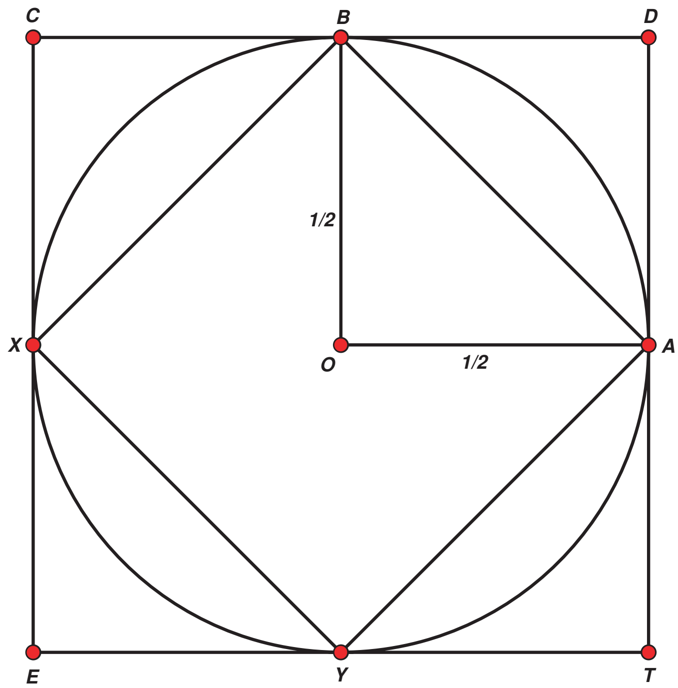

Figura 5.6: El mètode d'exhaustió ens permet acotar el valor de π.

clàssics i també a nous problemes; el mètode dels indivisibles. Va calcular amb el mètode dels indivisibles les àrees limitades per les paràboles de la forma $y = x^n$ per $n \in \mathbf{Z}^+$.

Per calcular àrees de recintes en el pla aquest mètode identifica una col·lecció de línies d'una figura amb una altra col·lecció de línies d'una altra figura. De la mateixa manera per calcular volums de recintes en l'espai identifica seccions planes d'una figura amb les d'una altra figura. Aquest mètode va ser durament criticat per la poca solidesa que en un començament tenia.

El mètode dels indivisibles també el van fer servir altres matemàtics. En l'apartat anterior s'exposa un problema la resolució del qual és un bon exemple d'aquest mètode: el càlcul de l'àrea de la cicloide (pàg. 119).

En el segle XVII i a partir de les aportacions de Viète i Descartes, els mètodes algebraics cada vegada van tenir un pes específic més important en la geometria. Aquesta influència també va arribar als problemes de quadratures. El càlcul de l'àrea sota les corbes de la forma $y = x^n$ per n natural es va fer establint una suma algebraica d'una quantitat finita de potències, examinant un pocs casos particulars i estudiant el valor de la suma quan la quantitat de sumands es fa cada vegada més gran. En aquests mètodes algebraics hi van participar diversos matemàtics:

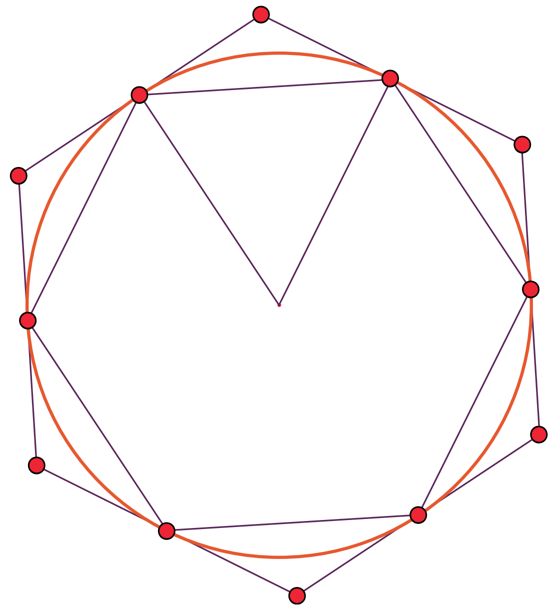

Figura 5.7: Aproximació de π pel mètode d'exhaustió inscrivint i circumscrivint un hexàgon regular.

Roberval, Fermat, Cavalieri, Wallis. El naixement de l'àlgebra amb Viète va tenir, per tant, conseqüències importants en el càlcul infinitesimal. Per exemplificar aquest mètode es mostra el càlcul de l'àrea sota la corba de la paràbola $y = x^2$ entre 0 i b (fig. 5.8, pàg. 126).

Donat que en primer lloc examinaven alguns casos particulars començaré així l'exemple, partint l'interval $[0, b]$ en tres subintervals de la mateixa grandària.

En aquest exemple $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\Delta x$ i $b = x_3 = 3\Delta x$ ja que hem pres $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ per tots els valors de i.
$S_3 = \Delta x \cdot (\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (2\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (3\Delta x)^3 = (1^2 + 2^2 + 3^2) \cdot (\Delta x)^3$

En general tenim, per tant, que:
$S_n = \Delta x \cdot (\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (2\Delta x)^2 + \Delta x \cdot (3\Delta x)^2 + \cdots + \Delta x \cdot (n\Delta x)^2 =$
$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)(\Delta x)^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \cdot \frac{b^3}{n^3} = \frac{b^3}{6} \cdot (1 + \frac{1}{n}) \cdot (2 + \frac{1}{n})$
si el nombre de sumands tendeix a infinit aleshores l'àrea tendeix a $\frac{b^3}{3}$.

Raonaments com aquest van sorgir en el segle XVII i van permetre calcular àrees limitades per corbes abans que es conegués la relació entre el càlcul diferencial i el càlcul integral, el teorema fonamental del càlcul.

En resum tenim que el càlcul d'àrees va començar pel mètode d'exhaustió, va continuar pel mètode dels indivisibles i finalment van aparèixer els mètodes algebraics. Si a batxillerat s'introdueixen els mètodes algebraics aleshores seria

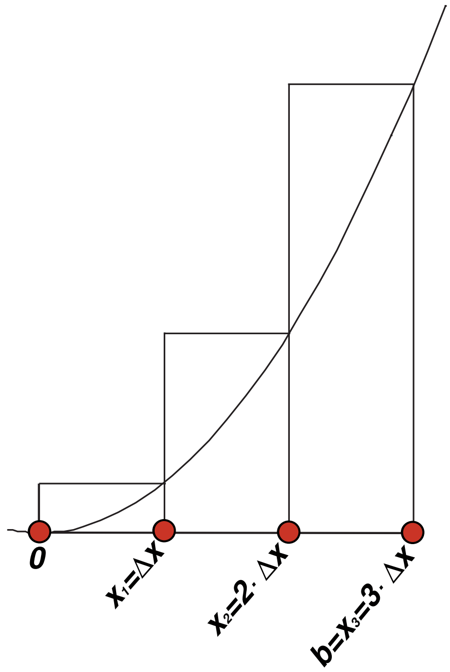

Figura 5.8: L'àrea sota la corba s'aproxima per la suma de les àrees dels rectangles.

convenient que a secundària obligatòria apareguessin els dos primers mètodes.

La resolució de problemes està inicialment apartada de tot rigor matemàtic i no és una manera d'arribar a teories generals en els seus primers passos. Els problemes exposats en aquest treball evidencien grans dificultats per part de *gegants* de la matemàtica. És raonable, per tant, exposar als nostres alumnes els resultats obtinguts, sense un procés previ d'experimentació que els aproximi a les dificultats viscudes en el naixement del càlcul?

Per altra banda el tractament donat als problemes pels *gegants* sovint no coincideix amb els coneixements previs de l'alumne (no només en el nivell d'assimilació d'aquests sinó també en els continguts en sí). Això no pot conduir fàcilment a l'abandonament dels aspectes epistemològics més rellevants apartant d'aquesta manera l'alumne del pensament que va portar al naixement de cadascun dels conceptes matemàtics. Les classes de matemàtiques no es poden convertir en una exposició de resultats tancats dels quals no es coneixen els processos que han portat a ells; si fos així l'alumne, sense ser-ne plenament conscient, veuria la matemàtica *morta*. Així, l'alumne pot arribar a veure alguns continguts matemàtics gens assolibles per ell quan, tal com s'han allunyat del seu naixement, probablement també ho fossin pels *gegants* que els van donar vida. Entenent la matemàtica com un procés i no com un resultat, el seu aprenentatge està directament relacionat amb els processos històrics que han tingut lloc. Alhora el coneixement de l'evolució històrica dels conceptes matemàtics és un ajut per a la comprensió de l'alumne i el coneixement de les tècniques antigues permet copsar els avantatges de les modernes.

La teoria genètica va tenir el seu punt de màxima acceptació a principi del segle XX, moment en què es va arribar a fer un paral·lelisme entre les diferents èpoques de l'evolució cronològica de la Història de la Matemàtica i els nivells de l'ensenyament escolar. Al llarg del segle XX es va fer palesa una realitat molt més complexa. Tot i així, alguns aspectes de la teoria genètica han conduït al fet que els conceptes de la Matemàtica que més han costat són també els que presenten més dificultats entre els alumnes.

Hauria de ser l'alumne qui a partir de la resolució de problemes, anés descobrint progressivament les eines teòriques que es pretén que arribi a conèixer. I l'alumne no està sol ja que el professor és qui el guia per tal d'orientar-lo en el camí cap a la construcció del seu propi coneixement; *una classe de matemàtiques ha d'estar sempre centrada en resoldre problemes i el paper del professor ha de ser el de cercador de situacions problemàtiques i significatives per l'estudiant* (MURILLO i BRENES, 1994, pàg. 378). Des del punt de vista d'alguns professors, no sé si molts, probablement pugui semblar utòpic però aquesta utopia podria ser inversament proporcional al grau d'aplicació de la resolució de problemes a l'aula. La construcció del coneixement seguint aquest estil d'ensenyament i aprenentatge requereix un coneixement dels processos d'invenció matemàtica per part dels docents. En parlar dels problemes matemàtics tractats al llarg de la història es pot pensar en problemes que no es poden abordar a secundària, però el desenvolupament de la matemàtica va partir de la necessitat de resoldre problemes particulars per arribar posteriorment a la formulació de problemes més generals. El naixement de la geometria analítica i del càlcul infinitesimal va estar ple d'intents, de nous problemes resolts i no resolts, d'errors, etc. Des d'aquest punt de vista la matemàtica és viva i aquesta és l'essència que hauria de rebre l'alumne.

La resolució de problemes forma part del procediment habitual sota el qual s'assoleixen els objectius proposats en l'ensenyament de la matemàtica? El càlcul d'àrees ja va ser tractat en la Grècia Clàssica fent ús del mètode d'exhaustió. Molts segles després el mètode dels indivisibles va permetre calcular àrees que fins aquell moment el mètode d'exhaustió no havia aconseguit i, posteriorment s'hi van afegir els mètodes algebraics. Així, els problemes sobre quadratures tenen una llarga història i en el segle XVII la relació entre el càlcul diferencial i l'integral va permetre fer créixer la matemàtica de manera molt destacada tractant els problemes de quadratures de manera molt més efectiva. Ara bé, té sentit introduir el concepte d'integral sense que els alumnes estiguin familiaritzats amb els problemes anteriors? Més enllà de la dificultat de comprensió per part de l'alumne n'hi ha una de la que sovint se'n parla poc: l'alumne no tenia el problema plantejat quan de sobte es troba amb la resposta. Potser els problemes de quadratures haurien d'aparèixer en els primers cursos de secundària (12-13 anys) i s'hauria de tractar la resolució de problemes relacionats? No hi ha dubte, sense problemes no hi ha matemàtiques, sense problemes tampoc esdevé el seu aprenentatge.

5.3 Consolidació de resultats i mètode cíclic

La construcció d'un concepte pot exemplificar-se fent ús d'exercicis i/o posar-se en pràctica en la resolució de problemes que introdueixin preguntes amb la finalitat de generar nou coneixement. A continuació es mostren dues activitats. La primera està relacionada amb la construcció d'un resultat i la segona amb la resolució d'un problema creatiu.

En la primera, la dissecció d'un quadrat trasllada un fet transparent (l'àrea del quadrat és igual a la suma de les àrees de les seves parts) a una propietat dels triangles rectangles, el Teorema de Pitàgores.

En la segona, la resolució d'un problema real i experimentable condueix a la seva acotació. Això permet la resolució d'una part amb la propietat construïda en la primera activitat. Les altres parts del problema introdueixen interrogants que, atenent al mètode cíclic, es tractaran posteriorment. La construcció de fórmules, algorismes i resultats en general no pot aparèixer d'un dia per l'altre sinó que cal que tinguin un procés de maduració necessari per la comprensió de l'alumne.

La creativitat a la classe de matemàtiques necessita gran quantitat d'aquest tipus d'activitats. Recobrir el currículum des d'aquest enfoc és una tasca complexa ja que a més cal atendre la diversitat de l'alumnat i els diferents ritmes d'aprenentatge.

L'exposició no es presenta amb tot detall però s'ofereixen indicacions que poden ser d'ajuda pel seu desenvolupament i adaptació a l'aula.

Problema 5.3.1 *L'àrea del quadrat de la figura (fig. 5.9, pàg. 129) coincideix amb la suma de les àrees de cadascuna de les seves parts. A partir d'aquest fet dedueix una relació entre els costats del triangle.*

Són moltes les construccions que condueixen al Teorema de Pitàgores. Es proposa aquesta deixant els detalls pel lector.

Construïda aquesta relació entre els costats d'un triangle rectangle ens proposem fer-ne una aplicació que introdueixi un nou concepte.

Problema 5.3.2 *En la construcció d'una bicicleta ens proposem conèixer la longitud de la cadena que haurem de fer servir en funció del plat, pinyó i també de la distància entre ells (fig. 5.10, pàg. 130).*

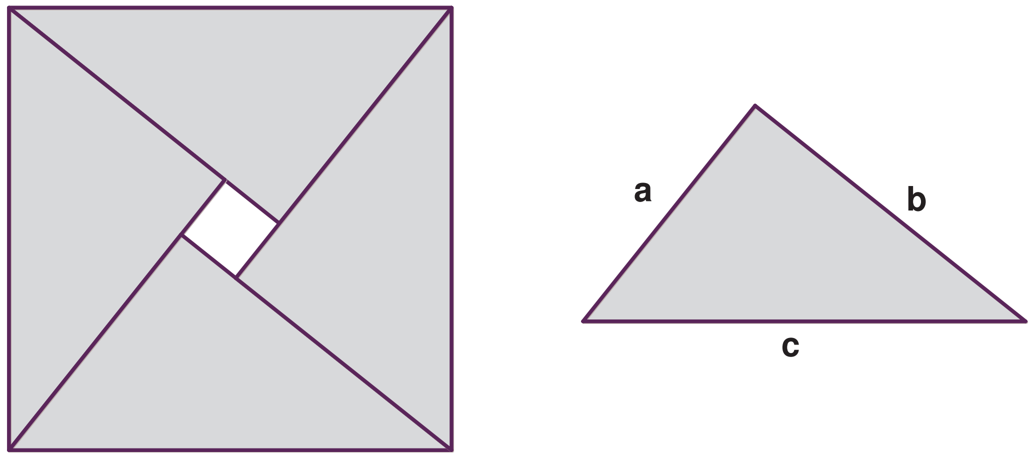

Figura 5.9: Construcció del Teorema de Pitàgores.

En el gràfic adjunt (fig. 5.10, pàg. 130) es presenta el plat i el pinyó com dues circumferències i la cadena, com dos segments i dos arcs de circumferència. El gràfic es mostra una mica exagerat per evitar que l'alumne suposi el que no es diu. Com que el problema és relativament complex serà convenient dividir-lo en parts. Es pot optar per començar calculant la longitud dels segments tangents a ambdues circumferències, per fer això només és necessari el Teorema de Pitàgores. A continuació el més adequat passa per examinar com es poden construir amb regla i compàs els segments tangents per finalment calcular la longitud dels arcs de circumferència per on passa la cadena. Aquest problema no podrà ser finalitzat completament si l'alumne no disposa de coneixements elementals de trigonometria. Respon per tant a la mateixa estratègia emprada en la introducció de continguts utilitzada en el problema exposat de la prova PISA (pàg. 81) i en el de la construcció de carreteres (pàg. 92).

Problema 5.3.3 *Calcula la longitud dels segments tangents a les dues circumferències.*

Anomenem R i r els radis de les circumferències i d la distància entre els seus centres. El bloqueig resideix en esquematitzar gràficament l'enunciat per traslladar el problema inicial a un problema de triangles. Les dificultats dels alumnes seran molt menors quan hagin construït la figura següent (fig. 5.11, pàg. 130):

Aquesta figura els guiarà per tal que apliquin el Teorema de Pitàgores sobre el triangle indicat. L'aplicació d'aquest resultat els conduirà a la relació $d^2 = (R-r)^2 + x^2$, que ens permet expressar la longitud del segment tangent en funció del radi de cadascuna de les circumferències i de la distància entre els seus centres: $x = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$. Permetem que sigui l'alumne qui ho descobreixi.

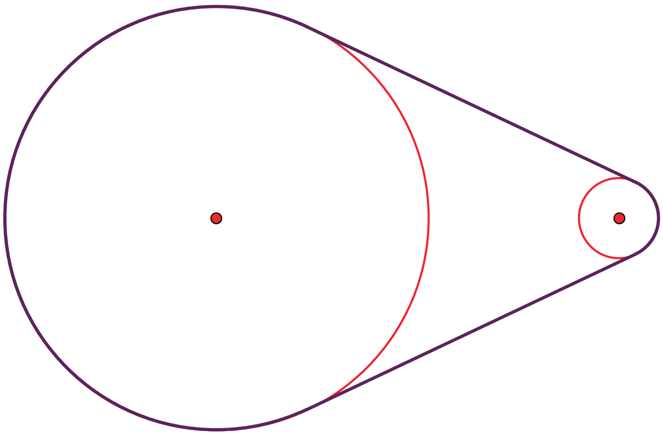

Figura 5.10: Aplicació del Teorema de Pitàgores i introducció a la trigonometria.

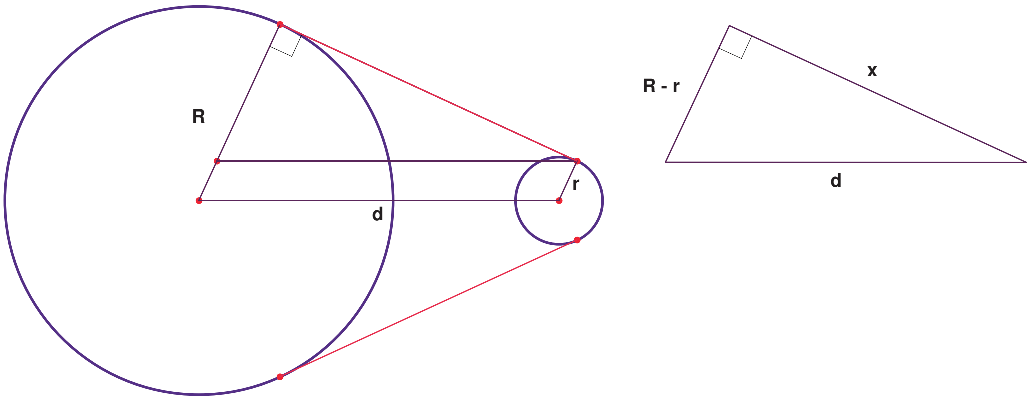

Figura 5.11: Esquema gràfic per l'aplicació del Teorema de Pitàgores.

És més que comprensible la dificultat que aquest tipus d'activitats suposa per l'alumne. L'aplicació rutinària del Teorema de Pitàgores sobre situacions que no requereixen reflexió pot ser immediata però s'aparta en excés de l'objectiu essencial que ens proposem.

Problema 5.3.4 *Donades dues circumferències exteriors dibuixa les rectes (o segments) tangents a ambdues amb regla i compàs.*

La construcció és necessària per afrontar el darrer apartat del problema. És convenient que aparegui aquesta necessitat a la classe de matemàtiques ja que, tal com tots sabem, molt estreta és la relació entre les construccions amb regla i compàs i la disciplina que ens ocupa.

Tot i així aquesta construcció és relativament laboriosa. Per això en el procés de resolució es pot optar per particularitzar. D'aquesta manera si considerem dues circumferències amb el mateix diàmetre el problema es simplifica molt i és assequible a tot l'alumnat (fig. 5.12, pàg. 131).

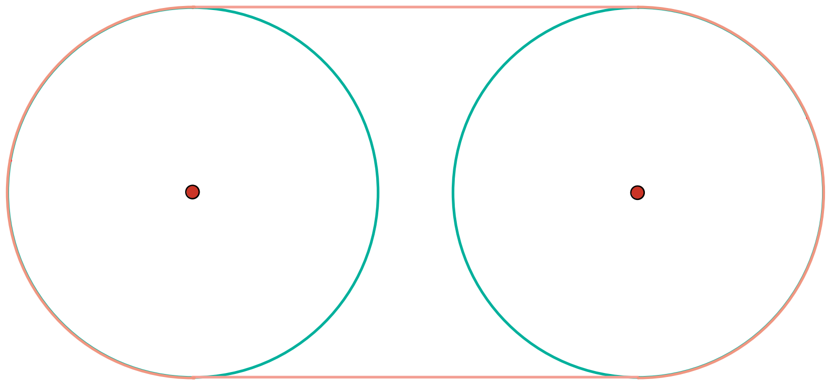

Figura 5.12: Particularització en la resolució d'un problema.

Considerem (fig. 5.13, pàg. 132) la circumferència C (centre en O i radi R) i també la circumferència C' (centre en O' i radi r). Suposem que tenen radis diferents, per exemple $R > r$; el cas en què es dóna la igualtat pot ser un cas particular encertat per començar el problema. Dibuixem la circumferència K amb centre en O i radi $R - r$. Dibuixem també la circumferència L que passa per O i O' i que té el centre en el punt mig d'ambdós. L talla K en els punts A i B. Les rectes OA i OB tallen la circumferència C en els punts T i T' que són els punts de tangència de C buscats. Les rectes paral·leles a OA i OB que passen per O' determinen sobre C' els corresponents punts de tangència S i S'. Unint T amb S i T' amb S' tenim les rectes tangents a C i C'.

En la miniaplicació de cabri[10] podeu veure i experimentar aquesta construcció; també podeu veure el dibuix[11] resultant. La justificació és més elemental que la construcció i es cedeix al lector. Observarà que $ATSO'$ és un rectangle...

Aquest problema convida a trobar les tangents interiors[12] a dues circumferències. Per aconseguir-ho, en la construcció[13] hem de procedir de manera anàloga al cas de les tangents exteriors per tal que la circumferència auxiliar K tingui radi $R + r$...

L'alumne podrà construir la figura amb regla i compàs així com també amb

[10]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/tanextcons.htm`
[11]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/tanextsol.htm`
[12]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/tanintsol.htm`
[13]Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/tanintcons.htm`

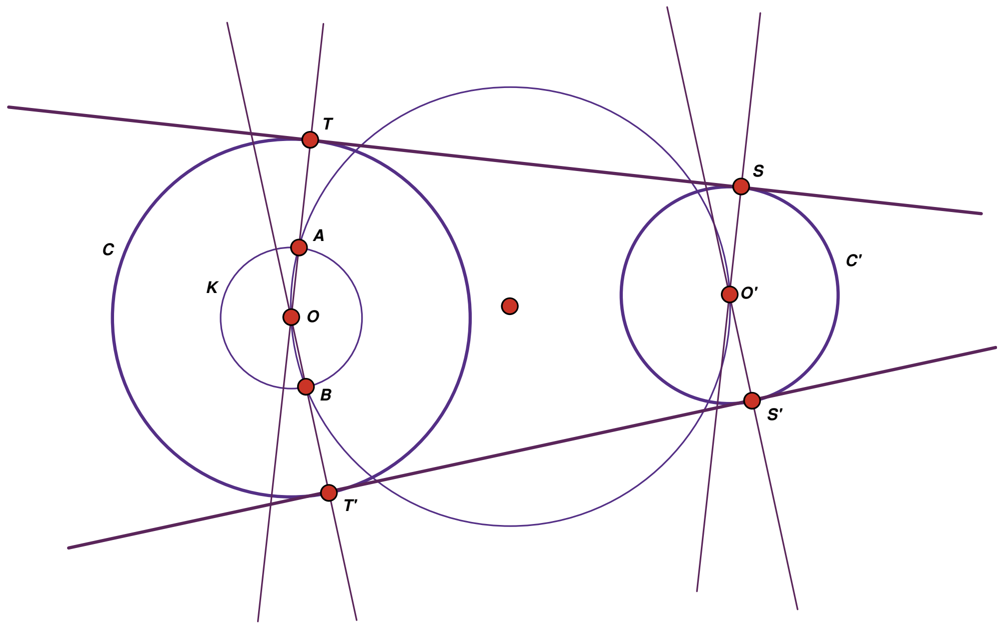

Figura 5.13: Construcció de les rectes tangents exteriors a dues circumferències donades.

Cabri-Géomètre o similars. És convenient reflexionar sobre el procés de construcció per tal que sigui útil més enllà de la resolució del proper apartat.

Problema 5.3.5 *Calcula la longitud dels arcs de circumferència per on passa la cadena.*

La resolució d'aquesta darrera part requereix trigonometria elemental i serà, per tant, un problema que justifica el seu posterior ensenyament. A la vista de la figura anterior considerem el quadrilàter $AOBO'$. Els angles $\angle OAO'$ i $\angle OBO'$ són rectes (A i B són punts de la circumferència que té OO' per diàmetre). Ens proposem calcular l'angle $\angle AOO'$ i amb ell podrem determinar la longitud dels arcs, operació que queda pel lector. En la figura següent (fig. 5.14, pàg. 133) s'observa que pel càlcul d'aquest angle és necessari fer ús de trigonometria elemental, obtenint $\angle AOO' = \arccos \frac{R-r}{d}$.

Aquest problema pot ser tractat de nou en el quart curs d'ESO (15a-16a) i també a batxillerat (16a-18a) com una activitat creativa que en el seu procés de resolució utilitza el Teorema de Pitàgores així com trigonometria elemental.

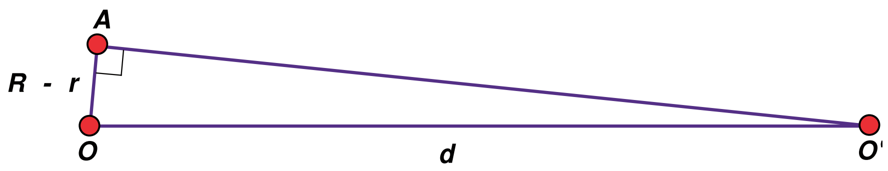

Figura 5.14: Introducció a la trigonometria des de la resolució d'un problema.

5.4 Naixement i mort d'un algorisme

El meu interès per aquest apartat va néixer fa molts anys. Explicaré una situació concreta que vaig viure amb l'únic objectiu d'extreure'n les motivacions matemàtiques que em porten a aquest exemple d'algorisme. Un estudiant d'administració i direcció d'empreses em va demanar ajuda respecte d'una assignatura de matemàtiques de la seva carrera. En el diàleg inicial va manifestar que tenia molt poca base i la meva pregunta immediata va ser que m'expliqués què volia dir amb això. La seva resposta va ser que no sabia fer una arrel quadrada. Ho va dir amb un sentiment de culpabilitat que em va sorprendre i em va fer reflexionar. Furgant en el que pensava vaig veure que el que li havien instruït va ser l'algorisme del càlcul d'arrels quadrades sense cap mena de justificació i no només això sinó que l'ensenyament que havia rebut s'havia caracteritzat per aquesta manera de procedir. El resultat era clar, no li agradaven les matemàtiques, no les entenia, les veia desvinculades de la realitat i només volia aprovar l'examen fent el que sempre li havien ensenyat a fer: aplicar algorismes i resultats tancats.

És conegut que l'algorisme per a l'extracció de l'arrel quadrada[14] prové del quadrat del binomi. Exposo un punt de vista geomètric de la construcció d'aquest algorisme a través de la resolució de problemes amb l'únic objectiu d'exemplificar la construcció d'algorismes a través de la resolució de problemes. No es pretén construir l'algorisme de l'arrel quadrada per qualsevol nombre, només exemplificar la seva construcció en un cas concret. La construcció d'aquest algorisme, així com el de l'arrel cúbica, divisió, multiplicació, resta i suma es pot consultar a diverses publicacions tals com la de (REY PASTOR i PUIG ADAM, 1935, pàgs. 79-100). Al llarg de la història de la matemàtica el càlcul d'arrels quadrades s'ha realitzat amb diversos mètodes tal com es pot consultar a l'article *Historia y enseñanza de la matemática. Aproximaciones de las raíces cuadradas* (MIRALLES i DEULOFEU, 2005, pàgs. 87-106).

Actualment la instrucció de l'algorisme de l'arrel quadrada ha desaparegut dels plans d'estudi. Això podria fer pensar que es tracta d'un tema que pot ser

[14] Es fa referència a l'algorisme de l'arrel quadrada que s'ha instruït a les escoles fins quasi finals del segle XX.

abandonat de tota reflexió. Durant molts anys però[15] una part important de docents ha rebut un ensenyament en el que la instrucció d'aquest algorisme era habitual, fins i tot el de l'arrel cúbica. Sota aquest punt de vista sí que es fa desitjable plantejar aquesta qüestió i reflexionar sobre ella.

No perdem de vista que la instrucció d'un algorisme no té res a veure amb l'aprenentatge del seu concepte. Es pot aprendre el concepte sense mostrar en cap moment un algorisme que permeti el seu càlcul.

Donat que els equipaments informàtics i les calculadores permeten la seva avaluació considero que, i així s'entén majoritàriament, aquest algorisme no s'ha d'instruir, però, s'ha de crear? En principi, si no s'ha d'utilitzar no té sentit que es creï, a menys que la seva construcció vingui de la resolució d'algun problema que posi en pràctica el treball de conceptes prèviament construïts (el quadrat del binomi per l'arrel quadrada). Potser aquesta construcció no tingui una gran influència en l'alumne però sí que la pot tenir en la formació del professorat, no tant per la construcció en sí com per las reflexions que se'n deriven.

Imaginem una classe que en les darreres setmanes s'ha familiaritzat amb la construcció de productes notables. Així, els alumnes han construït des d'un punt de vista geomètric la relació que els permet desenvolupar el quadrat d'una suma, d'una diferència, ... Ens proposem posar un problema en el qual els alumnes exercitin el quadrat d'una suma. Però no ens conformarem amb la realització d'exercicis rutinaris que ben poc els aportarà... Entrem a l'aula. Som-hi!

Problema 5.4.1 *Quant mesura el costat d'un quadrat d'àrea* $529u^2$*?*

Probablement respondran que l'arrel de $529u^2$, probablement no. Els alumnes habituats amb la resolució de problemes saben que darrera d'aquest enunciat s'hi amaga alguna cosa més que una simple resposta.

I - COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA

Quines són les dades? L'àrea... Quina és la incògnita? El costat... Podem calcular el costat a partir de l'àrea? Poc haurem de fer-los reflexionar fins que diguin que amb calculadora sí, posem 529 (referint-se a $529u^2$) i premem el botó de l'arrel quadrada. Efectivament, cal donar la raó a l'alumne. En aquest problema ens posarem a la pell dels nostres avantpassats que no disposaven de tecnologia suficient. Mirarem de reproduir els seus passos. Quin interès podien tenir en fer aquest càlcul? Doncs calcular el costat d'un terreny quadrat coneguda la seva àrea... Si el grup classe manifesta interès tirem endavant, en cas contrari abandonem aquest

[15]Es poden trobar llibres de text des de principis del segle XX com el de DALMAU (1933, pàgs. 137-144) on s'exposa l'algorisme de l'arrel quadrada sense la seva construcció.

problema, de fet ja saben sortir-se'n amb les eines de que disposen. Probablement més endavant ho demanin ells, en qualsevol cas si no ho demanen deixem el problema ja que no és rellevant ni pel currículum ni per la seva vida, estudiïn el que estudiïn. Suposaré a continuació que han manifestat interès o que posteriorment en manifesten. És suficient l'àrea per determinar el costat? Probablement ha arribat el moment de que vegin un quadrat (fig. 5.15, pàg. 135), però no els donem més...

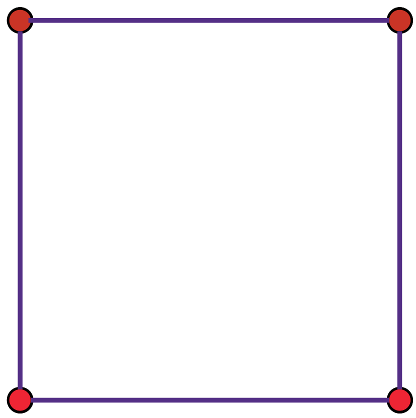

Figura 5.15: L'alumne construirà els seus coneixements i il·lustrarà sobre el quadrat els seus raonaments.

Si aquest quadrat que heu dibuixat té àrea $529u^2$ i el feu més gran, canviarà l'àrea?; canviarà el costat?; i si el feu més petit? Finalment quedaran convençuts de que l'àrea no només influeix en el costat del quadrat sinó que a més el determina.

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

Treballant les diferents possibilitats que el mètode de quatre passos de PÓLYA (1987, pàg. 19) ens ofereix, veurem que l'estudi d'un problema més senzill on en lloc de 529 tinguem 0, 100 o 10000 ens aportarà idees. El quadrat d'àrea 0 té costat 0, el d'àrea 100 té costat 10, el d'àrea 10000 té costat 100 (ometem les unitats i els ho diem, en som conscients). Fixem-nos en la quantitat de xifres...

Tot i que no sabem el costat del quadrat d'àrea 529, podem saber aproximadament quant pot ser? El resultat pot ser un nombre de tres xifres? Pot ser un nombre d'una xifra? Finalment veuran que és un nombre de dues xifres. Així, l'àrea del quadrat de costat un nombre de dues xifres que desconeixem és $529u^2$. Hem concebut un pla. No tenim una manera directa de calcular aquestes dues xifres, però anem a mirar d'executar-lo...

III - EXECUCIÓ DEL PLA

Cerquem un nombre ab (en base 10) de manera que l'àrea del quadrat que té aquest costat sigui $529u^2$. Quin és el valor numèric del nombre ab? Aquest nombre està format per b unitats i a desenes, per tant, $10a + b$.

Així, el quadrat de costat $10a + b$ (fig. 5.16, pàg. 136) ha de tenir àrea $529u^2$. Tot guiant-los deixem-los que ho representin...

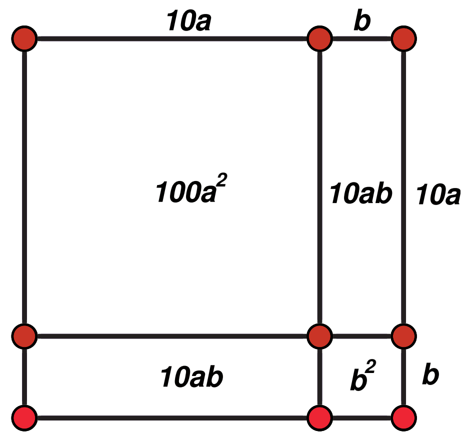

Figura 5.16: L'àrea del quadrat inicial coincideix amb la suma de l'àrea de les seves parts.

La part més gran de l'àrea del quadrat inicial correspon a l'àrea del quadrat de costat $10a$[16]. Així:

Àrea del quadrat inicial = (Àrea del quadrat de costat $10a$) + (2 vegades l'àrea del rectangle de costats $10a$ i b) + (Àrea del quadrat de costat b)

$$529 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$$
$$5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9 = 100a^2 + 2 \cdot 10ab + b^2$$

El resultat està format per cinc centenes, així, quant pot valer a? Pot ser $a = 3$? Pot ser a més gran que 3? Pot ser $a = 1$? I 0? La reflexió sobre aquestes qüestions portarà al fet que a ha de ser aquell nombre enter tal que el seu quadrat més s'aproxima, sense passar-se, de 5, és a dir, $a = 2$.

Determinat $a = 2$ tenim que:

$$1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 9 = 2 \cdot 10 \cdot 2 \cdot b + b^2$$
$$129 = 40b + b^2$$

[16]Notem que $1 \leq a \leq 9$ i com a conseqüència $100 \leq 100a^2 \leq 8100$, a no pot aproximar, per tant, unitats ni desenes, però sí que pot aproximar centenes. Com a conseqüència considerem per a el valor que més s'aproxima al que resulta de treure unitats i desenes de l'àrea inicialment donada.

Geomètricament ens indica que la suma de les àrees dels dos rectangles de la figura següent més l'àrea del quadrat de costat b ha de ser 129 (fig. 5.17, pàg. 137).

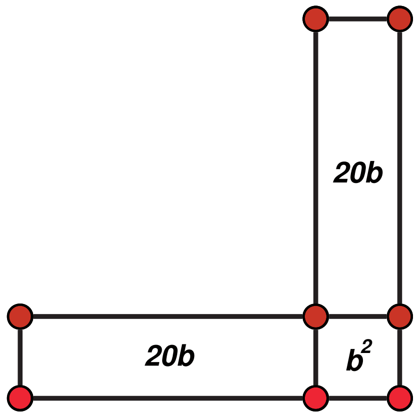

Figura 5.17: Figura que resulta en treure al quadrat inicial el quadrat de costat a.

Reorganitzant la figura 5.17 (pàg. 137) obtenim la 5.18 (pàg. 137) que facilita la visió geomètrica del problema.

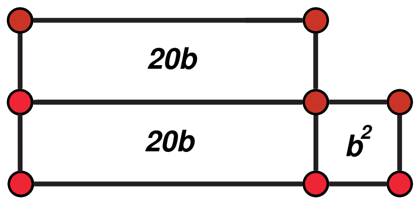

Figura 5.18: Figura que resulta en moure un dels rectangles per tal de posar l'un sobre l'altre.

La figura 5.19 (pàg. 138) ens permet veure que l'àrea més gran l'aporta el rectangle d'àrea $40b$. Així, si volem que $129 = 40b + b^2$, per esbrinar el valor de b inicialment menyspreem el terme b^2 i per tal que $40b$ s'acosti a 129 i no el sobrepassi prenem la part entera de la divisió de 129 entre 40 o, directament fem, 12 entre 4 obtenint $b = 3$ (4 prové de calcular $2a$). El càlcul de $40b + b^2$ dóna exactament 129, l'arrel és exacta.

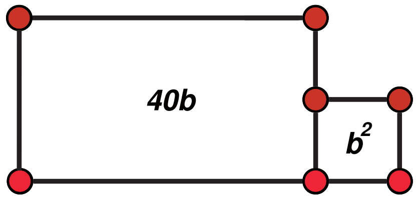

Figura 5.19: Incidència de cada part de la figura en l'àrea resultant.

IV - VISIÓ RETROSPECTIVA

Pots verificar la solució obtinguda? Donat el costat podem calcular l'àrea del quadrat... Pots utilitzar el resultat en un altre problema? És a dir, podem intentar treure un patró general que ens permeti establir un algorisme de càlcul? Pensem-hi!

Al llarg del problema hem convidat l'alumne a resoldre'l per sí mateix, ara li fem veure i li aclarim que volem trobar l'arrel quadrada de 529 i, per tant, volem establir una manera de calcular. Si volem establir un patró que ens serveixi per altres problemes aleshores estem cercant un algorisme. Què hem fet? Els alumnes van analitzant cadascun dels passos i els anem concretant:

Donat el 529 cerquem un nombre ab el quadrat del qual sigui 529:

1. Cerquem a com el nombre el quadrat del qual més s'aproxima a 5 (hem separat les dues xifres de la dreta).

2. Restem $529 - a^2 \cdot 100$, és a dir, al 5 li restem a^2. Obtenim 129.

3. Calculem $2a$. Obtenim $2 \cdot 2 = 4$.

4. Trobem b dividint les dues primeres xifres de 129 entre $2a$. Obtenim $b = 3$.

5. Calculem $40b + b^2 = (2(a \cdot 10) + b) \cdot b$. Però aquest càlcul es pot simplificar molt. Raonem amb els alumnes... $(2(a \cdot 10) + b)$ és el nombre ab posant $2a$ en lloc de a. I només ens queda multiplicar aquest nombre per b. És a dir, calcular $\underbrace{(2a)b}_{en\ base\ 10} \times b$

6. Restem a 129 el resultat de $\underbrace{(2a)b}_{en\ base\ 10} \times b$ obtenint 0. Si el nombre obtingut és superior al que li hem de restar aleshores triem una unitat menys. L'arrel quadrada de 529 és exactament 23, és a dir, $529 = 23^2$ o $\sqrt{529} = 23$.

Hem introduït un algorisme pel càlcul de l'arrel quadrada. En la figura (fig. 5.20, pàg. 139) s'il·lustra com aquest algorisme es pot presentar per escrit de manera simplificada. La resolució del problema ens ha portat a construir l'algorisme, però l'algorisme per sí sol no seria més que una rutina sense cap aportació per l'alumne, ni per ara ni pel futur.

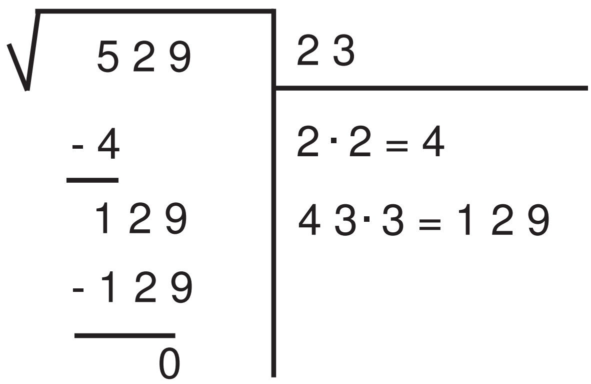

Figura 5.20: La visió retrospectiva en la resolució d'un problema geomètric porta a construir l'algorisme per calcular l'arrel quadrada.

Ens queden preguntes per respondre; és vàlid l'algorisme per nombres qualssevol? El càlcul d'arrels quadrades es pot acompanyar paral·lelament de la seva interpretació geomètrica. Pots veure d'un cop d'ull el funcionament d'aquest algorisme i la seva interpretació? El treball amb aquestes preguntes és fonamental. Pots obtenir el resultat de diferent forma? El treball des d'un punt de vista aritmètic també ens conduirà a aquest resultat però, sota el meu punt de vista, no és tan transparent. No és objectiu d'aquest estudi aprofundir en cadascun dels casos. Si voleu informació detallada sobre la construcció d'aquest algorisme des d'un punt de vista aritmètic podeu consultar les aportacions de REY PASTOR i PUIG ADAM (1935, pàgs. 94-98).

Els algorismes de la divisió, multiplicació, resta i suma sí que s'ensenyen en el currículum actual. Els conceptes associats a aquestes operacions són fonamentals. Imaginem un moment en el que les futures tecnologies simplifiquin el càlcul de la suma, resta, multiplicació i divisió fins el punt en que ningú faci servir l'algorisme (tal com ara passa amb l'arrel quadrada); seguirem ensenyant aquests algorismes?, ¿pot succeir en un futur, potser no molt llunyà, una evolució similar a la que va esdevenir amb l'algorisme de l'arrel quadrada?

5.5 Els recursos i la resolució de problemes

No es pretén ser exhaustiu respecte dels recursos en aquest treball. Incidiré en alguns aspectes que estan relacionats amb la resolució de problemes tot veient que, amb el que hem anat fent, els recursos han estat fonamentals. L'objectiu és facilitar la integració en la resolució de problemes de la gran quantitat de recursos que s'han realitzat i s'estan realitzant. Aquests són la gasolina que permet que el treball conjectural i creatiu prengui la seva màxima força. La manca de qualitat en els recursos pot fer que la resolució de problemes s'hagi de limitar per la complexitat que suposa la insuficiència d'aquests. Per altra banda, la utilització de recursos sota una metodologia que no té entre els seus objectius la creativitat, pot esdevenir una distracció per als alumnes que no aprofiten el que els passa pel davant. Els recursos han de donar suport a la resolució de problemes, però el diàleg que ha d'establir el professor amb el grup classe mai podrà ser substituït per aquests ja que si això s'intentés la creativitat i innovació de l'alumne es veuria frenada.

Sovint es poden veure problemes, en particular alguns que han aparegut en les proves d'accés al cos de professors d'ensenyament secundari, que es poden adaptar per ser tractats a les aules de secundària, és clar, no sota el raonament logicodeductiu que sovint és el que es demana en aquestes[17]. El quart problema de les proves d'accés al cos de professors d'ensenyament secundari de l'any 2005 (torn lliure) deia:

Problema 5.5.1 *Tracem una recta r pel baricentre d'un triangle equilàter (en el mateix pla que aquest). Demostreu que la suma dels quadrats de les distàncies des dels tres vèrtexs del triangle fins a la recta r no depèn de la seva elecció.*

No els demanem als alumnes que ho demostrin, però sí que els podem demanar que esbrinin si és cert, per tant, podríem redactar l'enunciat així:

Problema 5.5.2 *Tracem una recta r pel baricentre d'un triangle equilàter (en el mateix pla que aquest). És la suma dels quadrats de les distàncies des dels tres vèrtexs del triangle fins a la recta r independentment de la recta que escollim? (fig. 5.21, 141).*

Inici del diàleg...

[17] Si acceptem que el treball conjectural és fonamental en l'ensenyament secundari, potser en les proves d'accés al cos de professors d'ensenyament secundari hauria de tenir un paper molt més protagonista.

I - COMPRENSIÓ DEL PROBLEMA

Les preguntes corresponents al primer dels quatre passos del mètode de Pólya facilitaran a l'alumne la comprensió del problema. Quan el problema estigui entès l'haurem de guiar per tal que faci un dibuix. Considero que la millor manera d'abordar el problema és començar sense tenir l'ordinador al davant (o tenir-lo apagat). Quan sorgeixi la necessitat ja el farem servir...

II - CONCEPCIÓ D'UN PLA

Probablement l'alumne no estigui familiaritzat amb un problema semblant i li calguin heurístiques per continuar. Podries considerar un cas particular?

L'alumne intentarà dibuixar diferents rectes i haurem de guiar-lo fins trobar aquella que el permeti calcular sense massa dificultat: una recta que passant pel baricentre passi per un vèrtex. Aquesta divideix per la meitat el costat oposat al vèrtex pel qual passa.

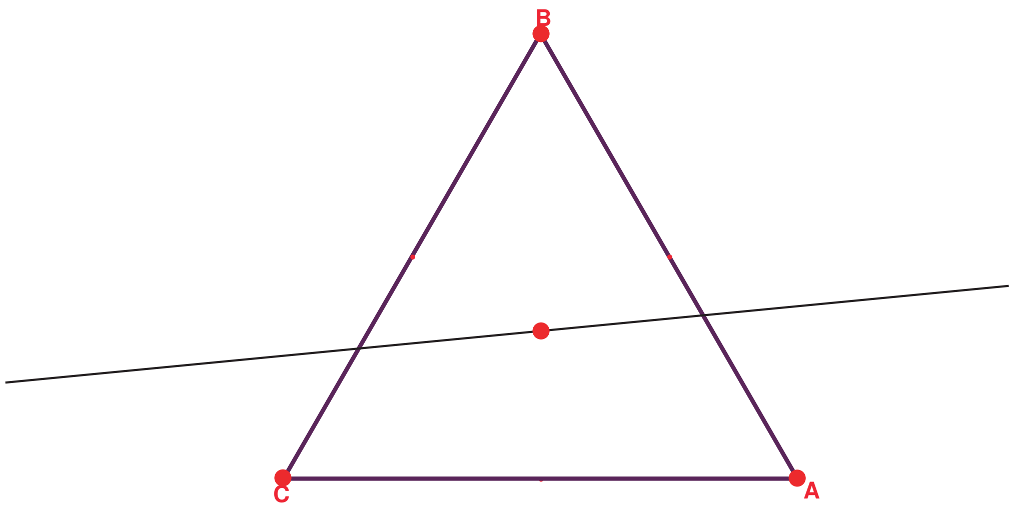

Figura 5.21: Esquema gràfic resultat de la comprensió del problema.

La suma dels quadrats de les distàncies dels vèrtexs a la recta escollida la determinarà fent un càlcul o probablement l'obtindrà de la suma de les àrees de dos quadrats obtenint $\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} = \frac{c^2}{2}$ (fig. 5.22, 142).

L'enunciat ens diu que la suma d'aquestes distàncies és sempre la mateixa, sigui quina sigui la recta que escollim passant pel baricentre. Ara sabem que en el cas que sigui certa aquesta invariància, no només és sempre la mateixa sinó que és la meitat del quadrat del costat del triangle equilàter. Això ho podem completar tot experimentant per qualsevol recta que passi pel baricentre (fig. 5.23, 143).

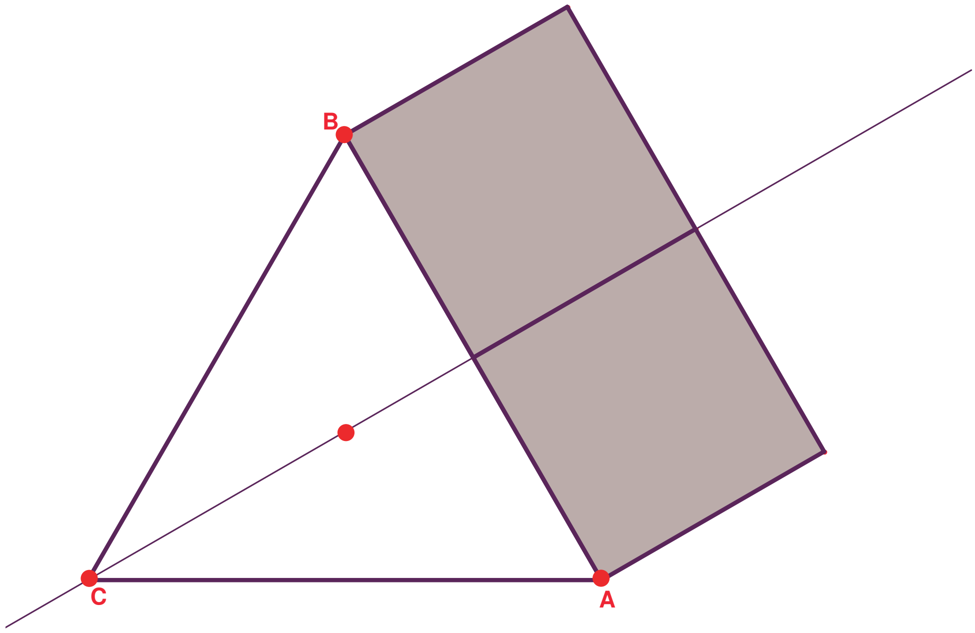

Figura 5.22: La suma demanada és constant i igual a la meitat del quadrat del costat del triangle.

Hem obtingut algun altre resultat fins aquest moment? Sí. El triangle ha de ser necessàriament equilàter ja que si no ho fos per cada costat tindríem un resultat diferent.

Coneixes i pots resoldre algun problema anàleg? En aquest moment tenim una gran oportunitat d'obrir el món de la matemàtica a l'alumne, sense la intenció de que resolgui el problema anàleg que plantegi. Com seria aquest problema en el cas tridimensional?

Problema 5.5.3 *Tracem una recta r pel baricentre d'un tetraedre regular. És la suma dels quadrats de les distàncies des dels quatre vèrtexs del tetraedre fins a la recta r independent de la recta que escollim?*

És més fàcil aquest problema que el que teníem? No. Però arribar a plantejar aquest problema és un èxit!!!

Quan el dia 1 d'agost de l'any 1944 Pólya va acabar el seu primer llibre *How to solve it*, no disposava d'un ordinador. Em permeto dir però que en aquest moment ell hauria optat per mirar de continuar el treball fent ús de les tecnologies actuals amb intenció conjectural. Al mateix temps penso que mai hauria substituït el diàleg inicial per cap mena d'aplicació informàtica.

Arribat aquest punt engeguem l'ordinador i el Cabri II (d'aquí a uns anys probablement es tractarà d'algun altre software). Realitzem la construcció i experimentem.

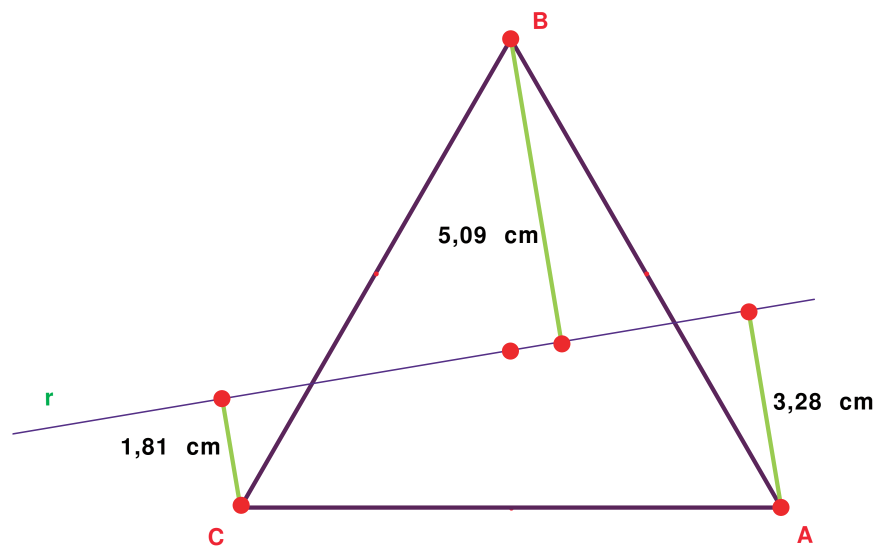

Figura 5.23: L'applet de JAVA ens permet veure que qualsevol recta que passa pel baricentre ens proporciona el mateix resultat.

En l'exemple de la figura tenim que la suma del quadrat de les distàncies de cada vèrtex a la recta és 39,99. Executem la següent miniaplicació de JAVA [18] i arrosseguem la recta amb el ratolí. Les distàncies del vèrtex a la recta varien però la suma dels quadrats d'aquestes distàncies es manté constant.

Aquest problema ha conduït l'alumne al tractament de raonaments matemàtics de gran vàlua per ell però també pel professor. De fet ha estat possible gràcies als recursos, en aquest cas informàtics.

Molts són els problemes que sense la utilització dels recursos apropiats tenen un tractament impossible a secundària. Vegem en la següent miniaplicació de JAVA [19] com es pot experimentar, observar i conjecturar el Teorema de Viviani; al final es deixa oberta la justificació. Aquesta aplicació permet, a més, veure que

[18] Disponible a `www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/sumaquadrats.htm`
[19] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/CQPPR1.htm`

la condició de que el punt sigui interior al triangle és necessària. L'ús de Cabri-Géomètre ens permet també experimentar, per exemple, el problema d'Heró [20] sota un enunciat adaptat. Els recursos també permeten realitzar construccions [21] que vinculen la matemàtica amb el que potser els alumnes també estudien a l'àrea de visual i plàstica. Però a més, permeten experimentar amb problemes com el del billar circular [22] que, si no fos per aquestes construccions, haurien d'esperar molts anys per donar-ne una resolució formulística.

Si fa una colla d'anys l'exposició de resultats tancats i el raonament logico-deductiu tenien un paper preponderant i amb l'entrada de la LOGSE es va mirar de prioritzar el treball experimental, val la pena reflexionar que ambdós no s'exclouen. Així, al llarg de l'ensenyament secundari el treball experimental pot anar acompanyat de petites fases de rigor sobre les construccions realitzades que, aplicades en la seva justa mesura, poden revitalitzar l'ensenyament de la matemàtica.

En el següent espai web [23] podeu veure una possibilitat sobre com introduir l'estudi de les tangències partint de l'experiència. Alguns dels resultats que s'aconsegueixen no es poden assolir únicament amb el treball amb llapis i paper.

Moltes són les possibilitats d'apropar als alumnes, amb la utilització de les TIC, problemes que al llarg de la secundària els poden quedar molt llunyans. No forma part d'aquest estudi aprofundir en els recursos, tot i que se'n presenten alguns que miren d'orientar selecció i utilització dels que el docent opti per emprar.

5.6 Conclusions sobre la construcció de fórmules i algorismes

La conveniència de la construcció cíclica de coneixement a través de la resolució de problemes és probablement la conclusió més destacada i exemplificada del treball. S'ha apuntat (pàg. 114) la direcció que condueix al disseny d'activitats creatives i innovadores per l'alumne. Un objectiu desitjable tot i que sempre millorable és la realització de materials curriculars que, promovent la creativitat, recobreixin el currículum.

Atenent a la intenció educativa d'aquest treball les activitats d'ensenyament i aprenentatge haurien de:

- Proposar enunciats la resolució dels quals no són el resultat d'una operació ni de l'aplicació d'una fórmula o d'un algorisme.

[20] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/CQPPR3.htm`
[21] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/CQPPR9.htm`
[22] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/CQPPR25EXP1.htm`
[23] Disponible a `http://www.xtec.cat/~rpujol1/cabri/apoloni.htm`

- Oferir problemes que suggereixin més d'una resolució i d'un recompte directe. L'experimentació hauria de ser suficient per resoldre alguns casos, però no tots, precisant així l'establiment de patrons i models.

- Suggerir problemes que a partir de la fase experimental (amb llapis, paper, ordinador, ...) condueixin l'alumne a la construcció (conjectural o ferma) d'algun resultat (fórmula, algorisme, ...) útil per altres problemes.

- Proposar problemes que puguin ser treballats de diferents maneres, tot i que només algunes d'elles siguin viables per l'alumne. Com més àmplia sigui la visió del problema per part del docent, millor serà la guia que li faciliti a l'alumne.

- Plantejar problemes que, tot i que sense els recursos disponibles en l'actualitat no es podrien abordar, amb la utilització de l'instrumental disponible (principalment els ordinadors) poden ser experimentats, observats i conjecturats, encara que no puguin ser demostrats.

- Suggerir problemes tals que en la seva fase d'experimentació requereixin la utilització de recursos, especialment de recursos informàtics. Fer que els problemes siguin rellevants per tal que les TIC quedin justificades i no només exemplificades.

- Atendre la diversitat de l'alumnat de manera que tot i que no es demani la construcció d'una fórmula, al llarg del procés de resolució l'alumne ho pugui aconseguir. El no assoliment d'aquesta construcció no hauria de bloquejar la resolució del problema.

Aquestes suggerències poden significar una ajuda per orientar el disseny d'activitats amb intenció creativa; la llista no és ni pretén ser exhaustiva. La presència d'aquest tipus de problemes en les classes de matemàtiques condueix a un major assoliment de l'objectiu essencial expressat en aquest estudi (pàg. IX).

Capítol 6

Disseny, anàlisi i resultats de la recerca

Índex

6.1 Preliminars

El pensament espontani, propi del sentit comú, és una forma de coneixement pràctic que, tot i la seva fragilitat, probablement és freqüent en la pràctica educativa quotidiana. Aquesta forma de pensament, que inevitablement sorgeix per la incidència de la pràctica educativa, té un determinat paper en aquesta recerca. Miro de distanciar-me d'ella per tal d'evitar que distorsioni els resultats que ens aportin les dades recollides i alhora, miro d'aprofitar-la per tal que la recerca respongui al que l'ensenyament de la matemàtica reclama.

S'intenta analitzar les dades recollides independentment de les opinions o preferències individuals. En la fase experimental (pàg. 157) aquestes són la font d'informació a partir de la qual s'obtenen els resultats (pàg. 161), conclusions (pàg. 168), prospectiva (pàg. 173) i implicacions didàctiques (pàg. 175). Tots ells són contrastables i això permetrà una major fiabilitat[1] del coneixement obtingut. L'estudi sistemàtic a través d'una metodologia rigorosa és fruit d'un pla de treball amb uns objectius perfectament delimitats (pàg. 156). Es mira d'utilitzar un llenguatge precís i alhora entenedor per tots els membres de la comunitat educativa, des del plantejament inicial fins als resultats, conclusions, prospectiva i implicacions didàctiques.

Tal com ja s'ha exposat en l'estructura del treball (pàg. XV), el marc teòric de la recerca es detalla i s'exemplifica en els cinc primers capítols. Així, en aquest capítol no s'exposarà el marc teòric però es farà referència a algunes parts d'ell, principalment en el moment de tractar el problema de la recerca (pàg. 153) i en les conclusions (pàg. 168).

El correcte desenvolupament de la recerca requereix claredat en els seus termes més bàsics, així doncs, què entenem per educació?

El TermCat, `http://www.termcat.net`, la defineix com la *transmissió de coneixements o de valors amb mitjans formals o informals*. Des d'un punt de vista formal la defineix com el *procés d'aprenentatge per mitjà d'institucions socials estructurades* i des del punt de vista informal com el *procés d'aprenentatge per mitjà de relacions no reconegudes per la seva funció educativa*.

Es pretén obtenir informació del que esdevé en les aules en aquest moment, tot acceptant que la transmissió de coneixements se supedita a les restriccions normatives vigents, entre les quals hi ha l'aplicació de la resolució de problemes.

De la mateixa manera que es precisa el terme *educació*, també cal fer-ho amb el terme *recerca*. El TermCat defineix una estratègia de recerca com el *conjunt ordenat d'actuacions basat en orientacions teòriques i metodològiques integrades per principis que organitzen i guien la recollida de dades i la formulació d'hipòte-*

[1] Grau en què es poden reproduir els resultats obtinguts en un mesurament quan es repeteix en condicions idèntiques.

sis i teories. Accepta per investigació activa la *recerca educativa sobre el terreny que es caracteritza per la participació dels ensenyants i els investigadors en totes les fases del procés de recerca i que dóna gran importància al context*. S'accepta aquesta definició per aquesta recerca tot incidint en el fet que aquest conjunt ordenat d'actuacions té una pretensió perfectament delimitada que consisteix en obtenir informació real i actual, tot i que no exhaustiva, del que succeeix en les aules, més enllà del que la comunitat d'experts considera òptim (pàg. 150) i el que la normativa (pàg. 150) estableix com a reglamentat.

6.2 El context i l'àmbit de la recerca

Donat que la recerca no pot ser dirigida a tot l'alumnat de Catalunya, principalment per limitacions de temps i pressupost (pàg. 157), s'opta per acotar. La manca de globalitat conduirà a conclusions (pàg. 168) que, tot i que parcials, tindran interès per sí mateixes i també per estudis posteriors. Els centres escollits pertanyen a un àmbit sociocultural mitjà tal com ho reflecteixen els seus projectes educatius.

Tots ells compleixen el desenvolupament curricular normatiu, es pronuncien com aconfessionals, tenen com a llengua vehicular el català i la seva línia pedagògica es caracteritza per voler desenvolupar l'esperit crític, admetre la diversitat de ritmes evolutius, donar importància tant a la relació educativa com a l'adquisició de continguts, cultivar la recerca, l'adquisició de coneixements i la sistematització científica pensant en una aplicació pràctica.

L'estratègia educativa d'aquests centres potencia el compromís amb el conjunt dels valors democràtics, el respecte als Drets Humans, el rebuig a qualsevol tipus de dogmatisme i la defensa de la llibertat dels membres de la comunitat escolar per manifestar lliurement llurs opinions. L'ensenyament que es proporciona és el mateix per als nois i les noies i es desenvolupa en un marc de coeducació, entenent aquesta com un intent d'educar per a la igualtat sense cap mena de discriminació per raó de sexe, raça, llengua o creença. La relació amb les escoles de primària de la zona i el contacte amb les famílies forma part de les accions sistemàtiques que es realitzen.

Aquests centres educatius de secundària on s'han recollit les dades, pertanyen a diferents àmbits geogràfics de Catalunya. Així, hi ha centres de Barcelona ciutat, del Baix Llobregat i de la província de Tarragona. Aquesta recerca parteix d'un centre d'interès directament relacionat amb el que esdevé a les aules i, en atenció a les dades recollides, arriba a unes conclusions, una prospectiva i unes implicacions didàctiques. L'estudi no tanca les qüestions de recerca que es proposa i n'obre d'altres. Alhora vol ser un pas previ que faciliti un coneixement al Departament d'Educació permetent-li considerar la possibilitat d'aprofundir en aquesta recerca.

6.3 Justificació de la recerca

El currículum vigent[2] diu que *...dels continguts de caire procedimental no es fa cap referència a la resolució de problemes. Aquesta, tanmateix, ha d'amarar tot el currículum, i ha de permetre la introducció de noves idees, conceptes i mètodes que s'aplicaran després en cada un dels àmbits mencionats. Així, la resolució de problemes, reals i oberts, no pas simples exercicis d'aplicació del què hem fet, és indispensable per assolir bona part dels objectius generals proposats.*[3]

La Societat Catalana de Matemàtiques i la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) van organitzar el 8 d'octubre de 2005 i per tercera vegada, una trobada conjunta al voltant de l'ensenyament de la matemàtica a tots els nivells educatius. Es va realitzar una taula rodona i diferents ponències entre les que, per la temàtica d'aquesta recerca, cal destacar: «La formació del professorat d'infantil i primària», «Una mirada, una reflexió i un repte: visió des de la Universitat », «La formació del professorat de secundària (inicial i permanent)» i «La formació del professorat des del punt de vista de la facultat de matemàtiques». Totes elles van mantenir una línia que defensava l'aplicació de la resolució de problemes i l'ensenyament creatiu, tot citant sovint autors de gran rellevància pels fonaments del marc teòric d'aquesta recerca: George Pólya, Pedro Puig Adam, ...

Així, la normativa proposa l'aplicació de la resolució de problemes, i la comunitat d'experts (així entenc els integrants de la jornada que s'acaba d'esmentar) la defensen. Sembla doncs que tot condueix a que en les aules s'ha d'estar aplicant indubtablement aquest estil d'ensenyament i aprenentatge. Ara bé, tot i que miro que la meva experiència a secundària no influeixi sobre els resultats d'aquesta recerca, intueixo una gran distància entre el que la comunitat d'experts defensa, el que la normativa regula i el que en les aules esdevé. Per això, es focalitza l'atenció en les aules de matemàtiques de secundària respecte de l'aplicació de la resolució de problemes. A partir dels resultats obtinguts s'obriran altres preguntes que s'exposen a la part final d'aquest capítol.

Aquesta exploració permetrà veure fins a quin punt la resolució de problemes és una pràctica habitual en el nostre sistema educatiu. Conèixer aquesta realitat és objectiu prioritari i queda en segon lloc, en aquesta recerca, la seva crítica, ja que no es qüestiona l'eficàcia de la resolució de problemes com estil d'ensenyament-

[2]Currículum vigent en el curs acadèmic 2005/2006 en el qual es realitza aquesta recerca.

[3]DECRET 179/2002, de 25 de juny, pel qual es modifiquen el Decret 75/1992, de 9 de març, pel qual s'estableix l'ordenació general dels ensenyaments de l'educació infantil, l'educació primària i l'educació secundària obligatòria a Catalunya, el Decret 96/1992, de 28 d'abril, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments d'educació secundària obligatòria i el Decret 75/1996, de 5 de març, pel qual s'estableix l'ordenació dels crèdits variables de l'educació secundària obligatòria (DOGC núm. 3670 - 04/07/2002).

aprenentatge sinó que s'explora la seva aplicació. És fonamental que la recerca comenci per aquí ja que, per tal que la resolució de problemes com estil d'ensenyament i aprenentatge sigui qüestionat, el primer que cal és que s'estigui aplicant efectivament a les aules.

6.4 Característiques de la recerca

6.4.1 Matemàtica *versus* educació matemàtica

Al llarg d'aquest procés hi intervenen diversos aspectes fortament relacionats entre sí. Això fa que calgui aclarir els diferents punts de vista amb els quals es pot abordar aquesta recerca i alhora, explicitar per quin s'opta. La resolució de problemes va ser defensada per George Pólya com un element fonamental, principalment a secundària, en el procés educatiu d'aquesta disciplina; ... *una de les principals finalitats del currículum de matemàtiques de secundària consisteix en desenvolupar l'habilitat dels alumnes per resoldre problemes* (PÓLYA, 1981, vol. I, pàg. 100). A més d'atendre les aportacions d'altres autors, el marc teòric d'aquesta recerca no perd de vista els seus origens. La creació matemàtica[4] i el seu ensenyament poden distanciar-se més o menys segons com s'aparti aquest darrer del seu procés de gènesi. El vincle entre el procés de creació matemàtica i el seu ensenyament fa que en la recerca calgui tenir present tant l'ensenyament de la matemàtica com la pròpia disciplina.

L'interès es focalitza en veure com s'ensenya la matemàtica a través de la resolució de problemes. Es diagnosticarà la utilització de la resolució de problemes en el procés d'ensenyament de la matemàtica, centrant l'atenció en uns pocs aspectes fonamentals perquè això sigui possible. Cal mantenir, per tant, oberta l'atenció per ambdues disciplines ja que pretenent obtenir informació sobre l'ensenyament de la matemàtica, no ha de ser el desconeixement de la matèria una dificultat que impedeixi que les dades recollides ens aportin la informació que ens proposem obtenir.

6.4.2 Professor i investigador: avantatges i inconvenients

La pràctica educativa a l'ensenyament secundari m'ha permès conèixer de primera mà la realitat de l'ensenyament de la matemàtica en aquesta etapa educativa. Això facilita la utilització d'un llenguatge proper i comprensible pels alumnes de secundària. Per altra banda la proximitat amb el dia a dia de l'ensenyament pot

[4]El TermCat defineix *matemàtiques* com la ciència que estudia les propietats dels nombres, les figures, els conjunts, les operacions, les funcions, etc. Per a la recerca cal entendre l'aspecte unificador del terme, tal com s'exposa en la secció 3.2.1 de la pàgina 56.

portar a no veure des d'un punt de vista més general certes dificultats que es poden englobar dins d'un altre problema més ampli. És per aquest motiu que cal tenir en ment la realitat educativa viscuda i per altra banda és convenient mantenir la distància suficient que impedeixi que «els arbres no deixin veure el bosc».

Així, el professor que a vegades és objecte d'estudi passa a ser-ne subjecte i les propostes d'actuació que rebia passen a ser ara objectiu de recerca. Si les recerques realitzades han estat decisives a l'hora d'establir els criteris que ha formulat el Departament d'Educació, en el moment que el professor passa a realitzar les tasques pròpies de l'investigador, ha de mantenir un esperit crític i distant, en el sentit que cal que no es deixi influir pel coneixement previ, més enllà del que les dades puguin revelar.

Com a conseqüència, en aquesta recerca s'intenta aprofitar els aspectes positius que aporta l'experiència docent prèvia però també es mira de minimitzar aquelles influències que, fruit del pensament espontani, poden esbiaixar la interpretació dels resultats (pàg. 161) que es deriven de les dades recollides: conclusions (pàg. 168), prospectiva (pàg. 173) i implicacions didàctiques(pàg. 175).

6.4.3 Paradigma de la recerca

Aquesta recerca s'emmarca dins d'un paradigma quantitatiu en el sentit que intenta, com a punt de partida, penetrar en una situació concreta del món educatiu per veure si s'aplica o no la resolució de problemes en les aules de secundària.

La distància amb el paradigma interpretatiu i sociocrític ve donada principalment pel fet que aquesta recerca se centra en un context específic (sec. 6.2, pàg. 149) i mira de donar una diagnosi concreta; la interpretació i la crítica són dos passos més que no formen part d'aquesta recerca perquè requereixen prèviament d'ella.

Donat que la normativa vigent ja contempla la resolució de problemes com estil d'ensenyament-aprenentatge, no es pot situar aquesta recerca, des d'un començament, en un paradigma sociocrític ja que en primer lloc cal veure quin paper ocupa la resolució de problemes en l'ensenyament actual. Realitzada aquesta diagnosi sorgiran diverses preguntes que proposaran la interpretació dels resultats (paradigma interpretatiu) i que també conduiran a qüestionar la resolució de problemes com estil d'ensenyament i aprenentatge (paradigma sociocrític).

Aquesta recerca, que opta per un paradigma quantitatiu, és el primer pas d'una altra més amplia que, tot i no ser ara objecte d'estudi, haurà de continuar amb la interpretació dels resultats obtinguts i amb una crítica de l'estil d'ensenyament i aprenentatge objecte d'estudi.

6.4.4 Classificació de la recerca

L'essència d'aquesta recerca consisteix en mirar de conèixer i explicar l'actual situació de la resolució de problemes en les classes de matemàtiques de secundària. Per altra banda té una finalitat aplicada ja que proposa possibilitats d'actuació a partir dels resultats obtinguts. A partir d'aquests s'obren preguntes (pàg. 173) relatives a com es pot continuar aquesta recerca, per tal d'interpretar i potser criticar l'actual estil d'ensenyament.

L'estudi se centra en el curs escolar 2005/2006, per tant, es tracta d'una recerca sincrònica o seccional.

No es pretén només mesurar una sèrie de variables per obtenir resultats sobre la resolució de problemes sinó que a més es pretén que a partir d'aquestes es pugui fer una primera aproximació que permeti conèixer els factors que intervenen en la més o menys encertada aplicació de la resolució de problemes o, potser conèixer la seva manca d'aplicació.

Les limitacions d'aquesta recerca (pàg. 157) fan que sigui una petita investigació que centra la fase experimental (pàg. 157) en petits grups i que, en funció dels resultats (pàg. 161), proposarà un estudi més ampli o exhaustiu (pàg. 173).

Es vol esbrinar si la resolució de problemes és un estil d'ensenyament i aprenentatge present a l'Educació Secundària Obligatòria. A la vista dels resultats i en el moment de preocupar-nos per descobrir el perquè s'aplica d'una determinada manera, la recerca pren un caire més qualitatiu. L'estudi quantitatiu no serà dirigit a una mostra significativa, si acceptem com a població objecte d'estudi el conjunt d'estudiants de Catalunya. El qualitatiu requerirà, quan s'escaigui, de la utilització d'altres estratègies de recollida de dades.

El fet d'estudiar l'aplicació de la resolució de problemes a les aules, quan teòricament ja s'ha d'estar aplicant, fa que aquesta recerca es pogués, en un principi, pensar com un estudi de replicació. Tot i així, no disposo ni conec una recerca propera en el temps i en l'espai que conclogui que la resolució de problemes és una realitat a les aules i, per tant, no és una rèplica d'una altra recerca.

Perquè aquest estil d'ensenyament-aprenentatge pugui ser defensat i criticat primer ha de ser aplicat. Si ja s'està aplicant aleshores cal veure de quina manera. Si anys després el Departament d'Educació ha de prendre decisions cal que disposi de recerques que l'informin de l'èxit, fracàs o desconeixement degut a la manca d'aplicació dels estils d'ensenyament i aprenentatge proposats.

6.5 El problema de la recerca

El problema de recerca està triat d'acord amb el que, des de la meva percepció de l'ensenyament secundari, és una de les arrels de les dificultats de l'ensenyament de la matemàtica. He triat doncs com a objecte d'estudi un de proper als meus interessos: *la construcció del coneixement matemàtic a través de la resolució de problemes*. La lectura del currículum vigent[5] on s'explicita que la resolució de problemes ha d'amarar tot el currículum, permet veure que forma part de l'estil d'ensenyament i aprenentatge proposat per l'administració. La recerca se centra, en línies generals, en veure quina és l'aplicació efectiva de la resolució de problemes en les aules; la rellevància pràctica està justificada. Respecte de la rellevància teòrica, aquesta diagnosi difícilment aportarà per sí sola algun aspecte que no sigui ja conegut.

6.5.1 Definicions i constructes

Des de George Pólya (pàg. 21), Mason, Burton i Stacey (pàg. 64), Schoenfeld (pàg. 72), Miguel de Guzmán (pàg. 74) i d'altres fins l'actualitat, les aportacions i recerques que van en la mateixa direcció que aquest estudi han estat nombroses i destacades. Ara bé, la que aquí s'exposa dóna un punt de vigència en el temps i en l'espai que pot obrir una reflexió (a l'administració, editorials, docents, ...) i alhora generar preguntes per recerques amb objectius similars a aquesta.

La meva experiència a secundària em condueix a acceptar positivament que la resolució de problemes facilita l'ensenyament creatiu i participatiu. Per tant, no em resulta una dificultat passar dels meus interessos personals al problema de la recerca. Ara bé, aquesta recerca esdevé necessària quan probablement el professorat entén la resolució de problemes de maneres ben diferents i *potser hi ha tants constructivismes com constructivistes declarats* (ARCAVI, 1999, pàg. 40).

Accepto que la resolució de problemes, atenent a l'objectiu essencial exposat a la pàgina IX, és una eina fonamental en la construcció de coneixement, rellevant des dels primers cursos de primària fins a la universitat passant per altres formacions reglades i no reglades. La meva experiència a secundària fa que, donada la necessitat d'acotar el problema, opti per aquesta etapa educativa. Estic particulament interessat en la construcció del coneixement matemàtic en alumnes de secundària, principalment dels primers anys de secundària obligatòria. Per això la recerca es centra en els dos primers cursos d'ESO (12a-14a), tot i que la recollida de dades va una mica més enllà. Respecte del contingut no seré molt estricte en l'acotació ja que no m'interessa tant conèixer aspectes concrets d'una determinada part del currículum com diagnosticar l'estil d'ensenyament aprenentatge utilitzat, en particular, la incidència de la resolució de problemes a les aules. Tot i així, els aspectes relacionats amb geometria permeten, des del meu punt de vista, una recerca més diagnosticable ja que, en força ocasions, la construcció de conceptes a través de la resolució de problemes és més fàcilment exemplificable en

[5] Decret 179/2002, de 25 de juny (DOGC núm. 3670, de 4.7.2002).

problemes geomètrics.

L'estudi estableix un compromís amb la comunitat educativa en el qual coincideixen l'opció d'aquesta per una millora en la qualitat de l'ensenyament (veure els resultats de les diagnosis realitzades a la pàgina 7) amb els meus interessos. La política educativa actual promou, recolza i proposa la resolució de problemes; de fet la llicència d'estudis que ha permès aquesta recerca és conseqüència d'aquest recolzament de l'administració educativa.

L'estudi compleix també amb un compromís amb els docents, ja que les qüestions de recerca estan directament relacionades amb la pràctica educativa. La meva experiència m'ha conduït a veure que els docents acostumen a tenir una formació curricular sòlida amb una tendència natural cap als aspectes formals que, davant la impossibilitat d'aplicació a l'aula, s'orienta cap a la instrucció de continguts. Fins aquí es pot entendre que la situació, des del punt de vista de les meves creences, és natural ja que el professorat després de l'aplicació exhaustiva del raonament lógicodeductiu a les facultats, accedeix a l'ensenyament secundari amb una minsa experiència en altres estils d'ensenyament i aprenentatge. Si la construcció del coneixement a través de la resolució de problemes no és la pràctica habitual a l'ensenyament universitari, i la formació post-universitària prèvia al treball docent és minsa (el CAP ho era i el CQP no ho hauria de ser), podem esperar que l'assaig-error sigui habitual i que l'experiència i la formació permanent siguin l'únic camí a seguir per donar-hi solució, mentre no es modifiqui la formació inicial universitària. Per tant, la hipòtesi inicial és que probablement els docents requereixin d'exemples i models, des del seu plantejament inicial fins a l'avaluació, per aplicar a l'aula l'estil d'ensenyament i aprenentatge a través de la resolució de problemes.

Aquesta recerca també té un compromís amb la societat. Des del moment en què la visió creativa, participativa i dialogant perd força davant de la formalitat i rigidesa tenim un problema a resoldre, si acceptem aquest fet com un problema. Si els alumnes, anys després que hagin finalitzat els seus estudis, recorden la matemàtica com una disciplina *dura* per sobre de *creativa* el problema s'alimenta; la matemàtica no arriba a la societat. Sense citar cap estudi postulo que en el moment actual molts pares i mares dels nostres alumnes tenen aquesta visió poc encoratjadora de la matemàtica, la recerca ja donarà resposta respecte dels alumnes. Si acceptem que el pensament crític és fonamental en la societat actual i entenem que l'ensenyament de la matemàtica és una disciplina que, amb molta més facilitat que altres, pot fer-lo arribar als adolescents, aleshores tenim una responsabilitat que hem d'assumir.

Aquesta recerca també manté un compromís amb la comunitat científica i educativa en el sentit que vol contribuir aportant una informació que pot ser d'interès per diferents sectors de la comunitat educativa així com per la comunitat d'experts (pàg. 150). Si, tal com diu la normativa, la resolució de problemes ha d'amarar tot el currículum aleshores es disposa d'un motiu més que justifica aquesta recerca. De fet la seva rellevància pren més força encara quan s'observen els resultats de l'informe PISA i de les Competències Bàsiques (pàg. 7).

Una recerca sobre resolució de problemes ha d'estar, com tota altra recerca, necessàriament delimitada. Les intencions podrien ser molt agosarades però això portaria a resultats fràgils a causa de les limitacions intrínseques a la recerca: temporals i econòmiques principalment. Em proposo, per tant, delimitar-la per tal d'evitar aquesta fragilitat. En primer lloc es pretén tenir un coneixement sobre els aspectes més bàsics de la resolució de problemes: aspectes terminològics elementals lligats a l'estil d'ensenyament-aprenentatge que és objecte d'estudi.

En la recerca no es farà un estudi quantitatiu ampli, ni tan sols significatiu si acceptem com a població (pàg. 157) els estudiants catalans dels primers cursos de l'ESO. Tampoc es farà ús de gran quantitat d'instruments ni d'estratègies de recollida de dades. La recerca donarà com a resultat una aproximació a la situació de la resolució de problemes a l'aula i, finalment propostes de millora. Tota aquesta delimitació condueix necessàriament a l'establiment d'uns objectius prou amplis com perquè responguin al plantejament donat i, prou concrets com perquè siguin abordables.

6.5.2 Objectius de la recerca

Els objectius de la recerca s'han escollit a la vista del problema de recerca i atenent el marc teòric (àmpliament detallat en la primera part d'aquest treball) en el context que ens ocupa. En l'apartat relatiu a les conclusions (pàg. 168) es detallaran els motius particulars que han portat a la inclusió de cadascun dels objectius tot lligant-ho amb els resultats i el marc teòric. Es pretén comprendre si l'aplicació de la resolució de problemes, en l'ensenyament de la matemàtica a secundària a Catalunya, és una realitat dins de les aules.

Per tal que això sigui possible els objectius de la recerca miren d'obtenir informació sobre la utilització d'uns pocs elements fonamentals per a l'aplicació de la resolució de problemes: treball conjectural, problemes reals, diferents resolucions, construcció de teoria, utilització de software adequat, gust pel que fan. En concret els objectius de la recerca són:

1. Esbrinar si els alumnes conjecturen a l'aula.
2. Esbrinar si els alumnes treballen problemes relacionats amb el món real.
3. Esbrinar si els alumnes resolen problemes de més d'una manera.
4. Esbrinar si els alumnes construeixen la teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes.

5. Esbrinar si els alumnes fan servir el Cabri-Géomètre, GeoGebra, Cinderella o similars.

6. Esbrinar si, tal com s'estan fent, les classes de matemàtiques agraden als alumnes.

6.5.3 Limitacions de l'estudi

La recerca està limitada a un any acadèmic i a la recollida de dades que pugui fer sense ajuda de cap grup ni persona. El finançament de les despeses produïdes per aquesta anirà a càrrec dels centres educatius, en la mesura que sigui possible. Quan no sigui possible haurà de ser abonada per mi. Tot i així, el cost econòmic es limita a fotocòpies i poca cosa més.

6.6 Disseny experimental

6.6.1 Disseny experimental

Ens proposem veure si la resolució de problemes és una realitat a les aules, amb les acotacions ja esmentades. Acceptant aquest punt de partida, l'instrument més adequat per obtenir un diagnòstic inicial és un qüestionari. A partir dels resultats d'aquest sorgiran noves preguntes que ens conduiran a haver d'emprar altres instruments i estratègies de recollida de dades.

La tendència a defensar la resolució de problemes com a estil d'ensenyament-aprenentatge, amb intenció de construir coneixement, és fàcil que impregni aquest treball, tot i que en aquesta fase experimental miraré de tenir una posició interpretativa per tal de no influir en els resultats. La manera d'entendre l'educació i la matemàtica té un paper vital alhora de considerar quin és l'ensenyament més apte pels alumnes. Però, per sobre d'això, les meves concepcions sobre la matemàtica i el seu ensenyament (pàg. 151) cediran un paper prioritari als resultats obtinguts a partir de les dades recollides.

6.6.2 La població de l'estudi

Aquest estudi intenta donar llum a alguns aspectes relacionats amb l'ensenyament de la matemàtica a Catalunya, tot i que es particularitza en alguns centres del territori català, d'entre els quals hi ha el centre educatiu on treballo, l'IES de l'Arboç. Cal dir però que els alumnes de primer cicle a qui es dirigeix una part de la fase experimental mai han estat guiats per mi. Això permet establir una distància convenient, potser fins i tot necessària, per tal que la recerca no es vegi influïda en excés pel meu punt de vista clarament constructivista.

6.6.3 Instruments i estratègies d'obtenció d'informació i recollida de dades

Fixats els objectius s'ha dissenyat les qüestions de recerca de manera que permetin diagnosticar el seu assoliment; en la taula 6.1 de la pàgina 160 es recullen els vincles existents entre uns i altres. No hi ha preguntes supèrflues (excepte la darrera) ni objectius desatesos. L'establiment de les qüestions de la recerca forma part del disseny de la mateixa i són el fil conductor d'aquesta.

Les preguntes que integren el qüestionari es determinen a partir d'aquests objectius prèviament delimitats. En l'annex titulat *Disseny del qüestionari*, el qual es pot consultar a la pàgina 179, figura la informació detallada sobre el procés d'elaboració del qüestionari.

Aquest disposa de força preguntes tancades que permeten un tractament estadístic. Es mesurarà la presència d'una sèrie d'elements fonamentals quan es vol implementar la resolució de problemes a l'aula. Tal com es pot consultar en l'annex esmentat, el qüestionari disposa d'una fase de disseny que inclou una prova pilot. Els objectius són prou concrets com perquè siguin atesos per dues o tres qüestions. Alhora, cada qüestió dona resposta a un objectiu, exceptuant la darrera en la que es deixa via oberta a l'opinió de l'alumne.

S'ha mirat d'emprar un llenguatge proper a l'alumne i de no demanar dues o més informacions en una mateixa pregunta. La majoria de les preguntes són obertes però concretes, les dicotòmiques i d'opció múltiple permeten copsar una opinió que em proposo contrastar. Per això, tot i que en algunes ocasions es demana a l'alumne què és el que fa en una situació concreta, també se li demana que ho exemplifiqui.

Inicialment faré ús d'un qüestionari que em permetrà tenir un coneixement preliminar del paper de la resolució de problemes a l'aula. El qüestionari en tindrà un de pilot que permetrà avaluar l'efectivitat de les qüestions de recerca per donar resposta als objectius establerts. Finalment faré ús d'estratègies d'informació, en particular entrevistes, per tal de copsar les tendències que motiven els resultats recollits en el qüestionaris. El qüestionari definitiu ha quedat com es mostra a continuació. En la pàgina 179 es pot consultar el detall del procés del seu disseny.

Qüestionari

1. Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.

2. D'entre les tres paraules següents posa un 1 a la que per a tu sigui més coneguda, un dos a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda:

Càlcul, conjectura, fórmula

3. Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques.

   A - Primer fem la teoria i després els problemes.
   B - Comencem per un problema i a partir d'ell construïm la teoria.
   Cap - En aquest cas explica la situació que sigui més habitual.

4. Heu fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?
5. Treballeu a classe problemes relacionats amb el món real?
6. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia.
7. Quan trobes la solució d'un problema, comproves si és correcte? Després d'això, feu alguna cosa més? Explica-ho.
8. T'agrada resoldre problemes de matemàtiques? Escriu l'enunciat d'un problema que t'agradi.
9. Què és el que t'agrada i què és el que no t'agrada de la classe de matemàtiques?
10. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia que quan feies primària no hauries sabut fer.
11. Resoleu a classe problemes de més d'una manera?
12. En el cas que recordis un problema que puguis resoldre de més d'una manera, escriu l'enunciat.
13. Escriu un resultat matemàtic (pots triar el que vulguis) que hagis obtingut a través d'alguna experiència (per exemple retallant cartolina i combinant els trossos, o movent i contant diversos objectes, ...). Escriu el resultat i explica l'experiència.
14. De quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques?
15. Vols dir alguna cosa que no haguem preguntat?

Aquestes qüestions de recerca estan lligades als objectius de la recerca exposats en la pàgina 156 segons la taula 6.1 de la pàgina 160.

Objectius-Qüestionari

	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	OBJ6
Q1	X					
Q2	X					
Q3				X		
Q4					X	
Q5		X				
Q6		X				
Q7				X		
Q8						X
Q9						X
Q10		X				
Q11			X			
Q12			X			
Q13	X					
Q14					X	
Q15						

Taula 6.1: Taula que recull els vincles entre els objectius de la recerca i les preguntes del qüestionari amb el qual es pretén obtenir la informació.

6.7 Anàlisi de la informació obtinguda

6.7.1 Procés d'anàlisi

Des dels primers qüestionaris analitzats i gràcies al treball previ s'ha confirmat que les preguntes s'entenien, tot i que les respostes han fet ampliar la previsió inicial de categories (pàg. 192). Tot i així, aquests increments no han conduït a la necessitat de modificar els qüestionaris. S'ha fet servir una codificació bàsica, tal com es pot consultar en l'arxiu en format EXCEL[6] on estan recollides.

En el procés de disseny del qüestionari (pàg. 179) s'han establert unes categories inicials (pàg. 192). Aquestes s'han creat atenent a les sospites que, des de la meva experiència docent, he tingut a la vista de les preguntes del qüestionari. S'han vist però lleugerament incrementades en el procés d'anàlisi tot arribant a establir-se les categories definitives (pàg. 161). A partir del primer centenar de qüestionaris les dades recollides han encaixat en les categories sense generar-ne de noves. El fet que les dades trobin una categoria on col·locar-se condueix a establir-les com a definitives. La informació aportada per aquestes és rellevant per a l'estudi i tenen significat per elles mateixes ja que es poden interpretar sense

[6] `http://www.xtec.cat/~rpujol1/Recerques/Llicencia/Dades.xls`

informació afegida.

	CATEGORIES					
	OBJECTIU 1	OBJECTIU 2	OBJECTIU 3	OBJECTIU 4	OBJECTIU 5	OBJECTIU 6
CAT. 1	No experimenten i no conjecturen.	No, no en treballen.	Els problemes es resolen d'una manera i s'abandonen.	No treballen la visió retrospectiva .	No fan servir l'ordinador.	No els agraden les classes de matemàtiques.
CAT. 2	Experimenten però no conjecturen.	Sí, en treballen però de primària.	Es resolen de més d'una manera però no es relacionen les diferents resolucions .	Treballen la visió retrospectiva però no construeixen teoria a partir d'ella.	Fan servir l'ordinador per calcular però no per conjecturar resultats.	Sí els agraden però el que els agrada són els exercicis o algorismes rutinaris.
CAT. 3	Conjecturen resultats.	Resolen problemes relacionats amb el món real. De secundària també.	Es resolen de més d'una manera i es relacionen les diferents resolucions .	Treballen la visió retrospectiva i construeixen teoria a partir d'ella.	Fan servir l'ordinador per conjecturar resultats.	Sí els agraden i el que els agrada són els problemes originals i creatius per a ells.
CAT. 4	No experimenten a secundària però ho feien a primària		Diuen que sí però no exemplifiquen aquesta afirmació.			

Figura 6.1: Taula que recull les categories finals.

Les categories reflecteixen els objectius de la recerca, són exhaustives ja que les dades s'han pogut col·locar en elles, són mútuament excloents ja que les dades no poden pertànyer a dues categories diferents. Se'ls ha posat noms que les fan entenedores i atenen l'essència de cadascun dels objectius. Sí que és veritat que, sense un esforç d'abstracció, hi podria haver gran quantitat de categories, però és aquest esforç el que permet que cadascuna d'elles ens aporti una unitat d'informació rellevant.

Donat que el volum de dades és nombrós s'ha constatat des d'un primer moment que seria convenient fer ús de suport informàtic per gestionar-les. Aquesta mecanització és important per prosseguir l'anàlisi de dades i alhora per facilitar la il·lustració dels resultats de la recerca.

6.7.2 Exposició de resultats

Respecte del primer objectiu de la recerca

El primer objectiu de la recerca és: *Esbrinar si els alumnes conjecturen a l'aula*. Per tal d'esbrinar el nivell d'assoliment d'aquest objectiu s'han proposat tres qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). La primera qüestió cerca el nivell de familiaritat de l'alumne amb les fórmules. La segona demana a l'alumne que graduï el coneixement dels termes càlcul, conjectura i fórmula ordenant aquests mots. En la tretzena qüestió es demana que l'alumne triï un resultat qualsevol que hagi construït a partir d'una experiència. La primera permet veure si l'alumne està familiaritzat amb els resultats matemàtics tancats, la tretzena si coneix algun exemple que l'hagi conduït d'una experiència a un resultat. La segona permet confrontar la informació aportada per les altres dues. Si els alumnes veuen moltes fórmules a classe aleshores és fàcil que n'escriguin alguna amb més o menys precisió, ja que no se'ls demana per una concreta sinó que se'ls deix triar qualsevol. De la mateixa manera si els alumnes construeixen resultats a partir d'experiències no tenen dificultats per triar-ne alguna d'entre les que fan.

En la figura 6.2 de la pàgina 162 es pot veure però que el treball conjectural és nul. Una part de l'alumnat sí que experimenta però aquesta experimentació no condueix a l'establiment de conjectures, tal com ens indiquen les dades recollides. Ara bé, el perquè això succeeix obre tota una sèrie de preguntes que s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca (sec. 6.9, pàg. 173).

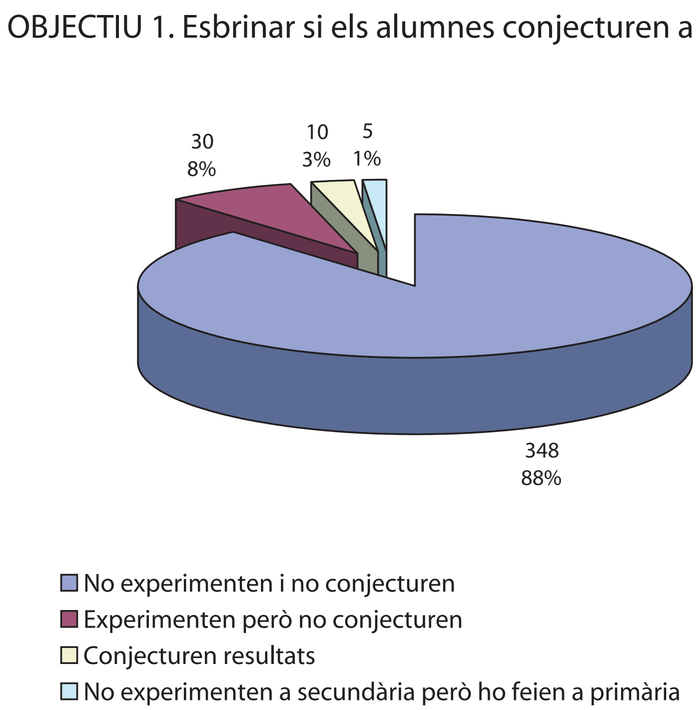

Figura 6.2: Resultats corresponents al primer objectiu de la recerca.

Els resultats ens diuen que el treball experimental com a primer pas en la construcció de coneixement no és una pràctica habitual a les classes de matemàtiques. Sí que hi ha experimentació (aproximadament una desena part dels alumnes, a la vista de les dades recollides), però deslligada de l'observació, l'establiment de conjectures i la consolidació de resultats.

Respecte del segon objectiu de la recerca

El segon objectiu de la recerca és: *Esbrinar si els alumnes treballen problemes relacionats amb el món real*. Per tal d'esbrinar el nivell d'assoliment d'aquest objectiu també s'han proposat tres qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). En la cinquena es demana si treballen problemes relacionats amb el món real, en la sisena un exemple concret i en la desena se'ls demana un altre exemple, però en aquesta ocasió d'una situació real que a primària no haguessin sabut fer. Aquestes qüestions permeten veure si els alumnes estan habituats a treballar amb problemes del seu dia a dia. A més permet extreure informació relativa a la incidència de l'ensenyament de la matemàtica a secundària en aquests tipus de problemes.

En la figura 6.3 de la pàgina 163 es pot veure que sí que es treballen problemes relacionats amb el món real (74%). Hi ha però una palesa dificultat en el moment de triar problemes que requereixin eines apreses a l'ensenyament secundari. Els alumnes tenen molta més facilitat per aplicar eines apreses a l'ensenyament primari (52%) que no pas d'apreses en l'ensenyament secundari (22%).

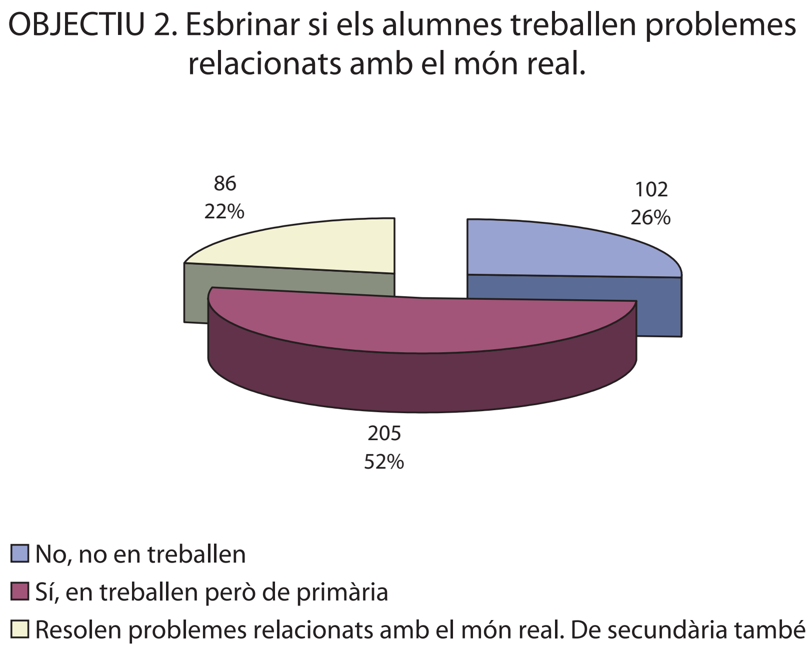

Figura 6.3: Resultats corresponents al segon objectiu de la recerca.

Eren previsibles les categories de resposta que es van establir com a inicials (pàg. 192) i, a diferència del primer objectiu, es van confirmar després de l'anàlisi de les dades recollides, tal com es pot veure en la taula corresponent a les categories finals (pàg. 161).

Així, de la mateixa manera que es desprèn que les matemàtiques de l'ensenyament primari arriben als alumnes com a eines bàsiques pel seu dia a dia, també es fa palesa una dificultat en el moment d'aplicar eines apreses a secundària en els problemes del dia a dia dels alumnes.

Respecte del tercer objectiu de la recerca

El tercer objectiu de la recerca és: *Esbrinar si els alumnes resolen problemes de més d'una manera*. Per tal d'esbrinar l'assoliment d'aquest objectiu s'han proposat dues qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). En l'onzena qüestió es demana a l'alumne si resolen problemes de més d'una manera i en la dotzena que escrigui un problema que sàpiga resoldre de més d'una manera. Tot i que en els primers qüestionaris les respostes conduïen a les categories establertes inicialment (pàg. 192), el resultat final ha conduït a una nova categoria en la que els alumnes diuen que sí però no ho saben exemplificar.

En la figura 6.4 de la pàgina 165 es pot veure que un 40% dels alumnes resolen els problemes d'una manera i abandonen el problema. Una petita quantitat d'alumes resolen problemes de més d'una manera. Una part important (54%) afirmen que sí que en resolen de més d'una manera però quan se'ls demana un cas (que poden triar) no ho saben exemplificar.

Aquesta dificultat per trobar un exemple es pot associar al fet que resoldre problemes de més d'una manera, tot i ser present a les aules secundària, no és una pràctica habitual. Aquesta i altres qüestions que requereixen una recerca més profunda s'exposaran a l'apartat dedicat a la prospectiva (sec. 6.9, pàg. 173).

Respecte del quart objectiu de la recerca

El quart objectiu de la recerca és: *Esbrinar si els alumnes construeixen la teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes*. Per tal d'esbrinar el nivell d'assoliment d'aquest objectiu també s'han proposat dues qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). En la tercera qüestió es demana a l'alumne que triï la pràctica habitual que es desenvolupa a la classe de matemàtiques. Se li dóna l'opció de triar entre fer problemes a partir de la teoria prèviament apresa, construir la teoria a partir de la resolució de problemes o manifestar una altra opció. En la setena qüestió se li demana què fa quan ja ha trobat la solució d'un problema. La tercera qüestió ens permet obtenir informació general sobre el possible enfocament constructivista a l'aula, mentre que la setena permet veure amb detall fins a quin punt arriba a l'alumnat la visió retrospectiva de la resolució de problemes.

En la figura 6.5 de la pàgina 166 es pot veure que, a partir de les dades recollides, la construcció de teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de

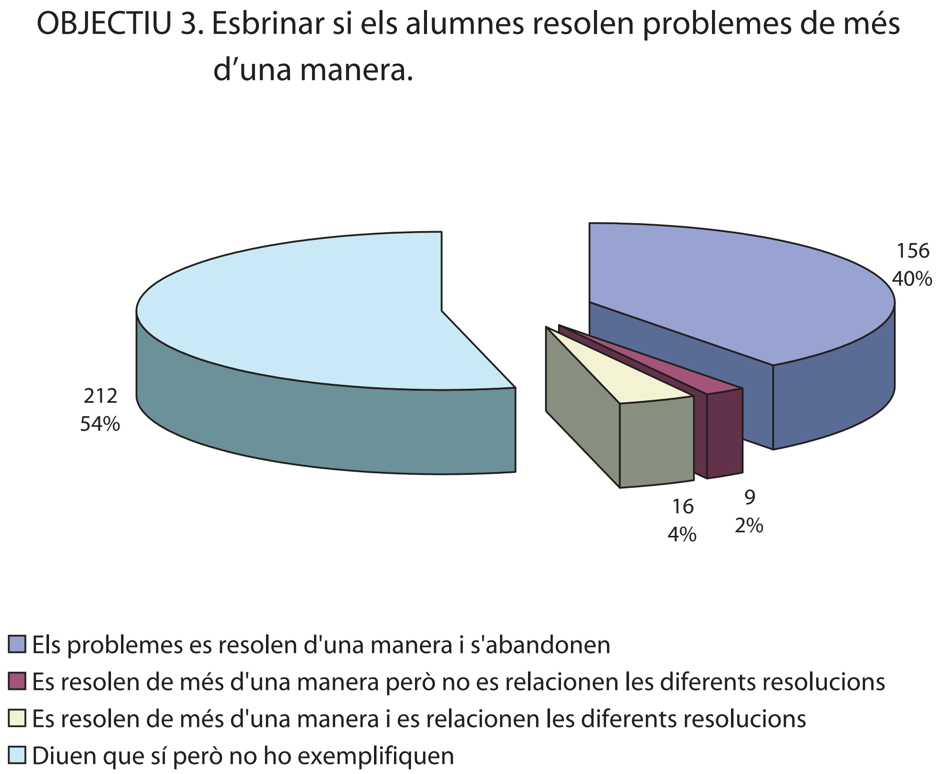

Figura 6.4: Resultats corresponents al tercer objectiu de la recerca.

problemes és una pràctica quasi inexistent.

En les conclusions (sec. 6.8, pàg. 168) es reprendrà el marc teòric i s'aprofundirà en aquest objectiu. En aquest apartat de resultats cal dir però que la contundència amb que es presenten, obre preguntes que s'exposaran a la prospectiva (sec. 6.9, pàg. 173) i possibilitats didàctiques que s'exposaran en l'apartat d'implicacions didàctiques (sec. 6.10, pàg. 175).

Respecte del cinquè objectiu de la recerca

El cinquè objectiu de la recerca és: *Esbrinar si els alumnes fan servir el Cabri-Géomètre, GeoGebra, Cinderella o similars*. Per tal d'esbrinar el nivell d'assoliment d'aquest objectiu també s'han proposat dues qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). En la quarta qüestió es demana a l'alumne si ha fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques i que escrigui de quin o quins es tracta. En la catorzena qüestió es demana de quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques. Aquestes qüestions no només pretenen extreure informació sobre la utilització o no de l'ordinador sinó que també cerquen veure si s'utilitza com a recurs creatiu a

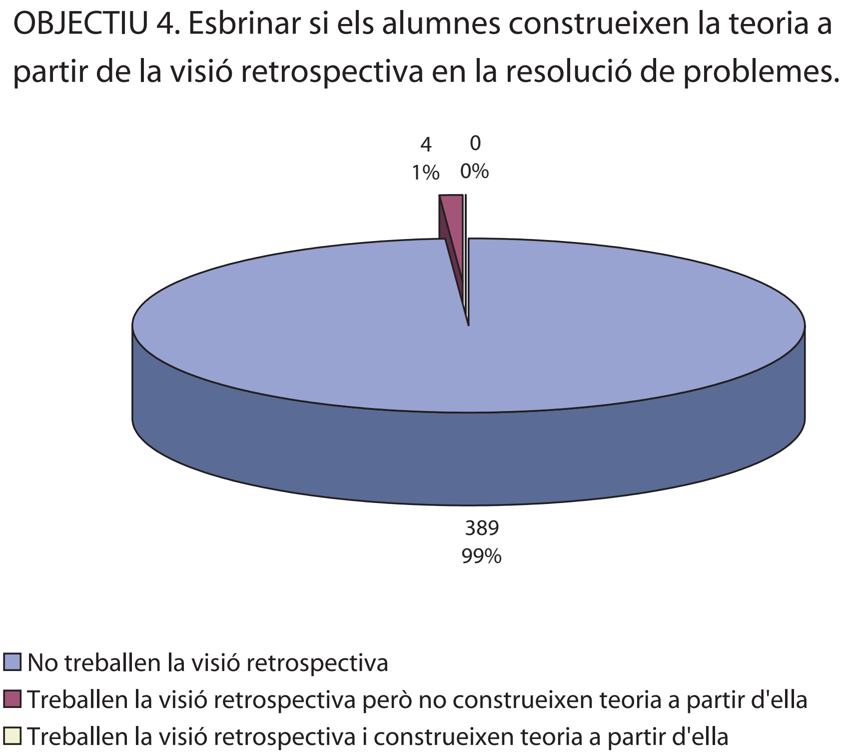

Figura 6.5: Resultats corresponents al quart objectiu de la recerca.

l'aula de matemàtiques. Les dades ens diuen que una part important de l'alumnat encara no fa servir l'ordinador en aquesta disciplina. Tot i així, quasi la meitat sí que el fan servir (42%) però com una ajuda pels procediments rutinaris. Les dades reflecteixen que pels alumnes l'ordinador, quan el fan servir per fer matemàtiques, és una potent eina de càlcul...

Les dades indiquen que els esforços quantitatius del Departament d'Educació per implantar les Tecnologies de la Informació i de la Comunicació requereix una reflexió profunda que es farà en les conclusions. També s'obriran preguntes en la prospectiva (sec. 6.9, pàg. 173) i possibilitats en les implicacions didàctiques (sec. 6.10, pàg. 175). En aquest apartat de resultats cal dir però que, a la vista de les dades i atenent a la minsa quantitat d'anys que fa de la proposta d'implantació de les TIC als centres educatius, si ara l'aspecte quantitatiu és fonamental, en pocs anys el qualitatiu serà essencial; potser ja hauria de ser-ho.

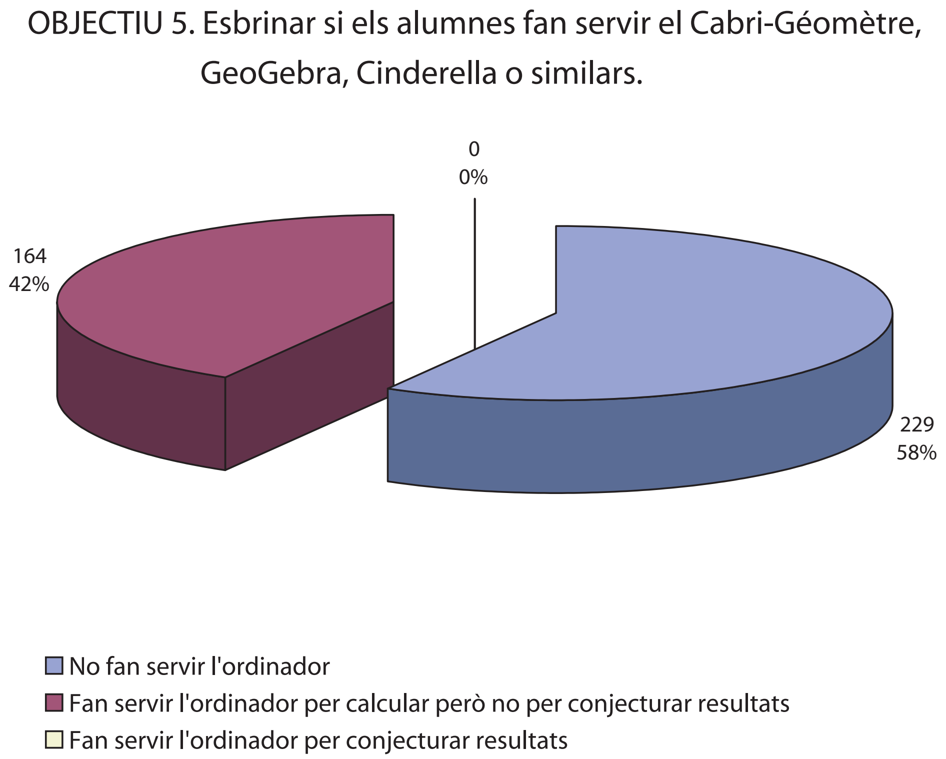

Figura 6.6: Resultats corresponents al cinquè objectiu de la recerca.

Respecte del sisè objectiu de la recerca

El sisè objectiu de la recerca és: *Esbrinar si, tal com s'estan fent, les classes de matemàtiques agraden als alumnes*. Per tal d'esbrinar el nivell d'assoliment d'aquest objectiu també s'han proposat dues qüestions (sec. 6.6.3, pàg. 158). En la vuitena qüestió es demana a l'alumne si li agrada resoldre problemes de matemàtiques i per tal d'exemplificar-ho se li demana també que escrigui l'enunciat d'un problema que li agradi. En la novena se li demana que exposi què és el que li agrada i què és el que no li agrada de les classes de matemàtiques. La vuitena permet veure si li agraden o no i en el cas que li agradin, si li agraden els problemes creatius o els exercicis rutinaris. La novena és més oberta i permet copsar amb més detall fins a quin punt li agraden les matemàtiques tal com les està aprenent.

A partir de les dades recollides tenim que poc més de la meitat dels alumnes (51%) diu que la matemàtica no els agrada. Entre els alumnes que diuen que sí que els agrada (49% del total), quasi la totalitat (47% del total) ho manifesta així en virtut dels exercicis rutinaris. Aquests resultats obren una forta reflexió que es tractarà en les conclusions (sec. 6.8, pàg. 168), prospectiva (sec. 6.9, pàg. 173) i

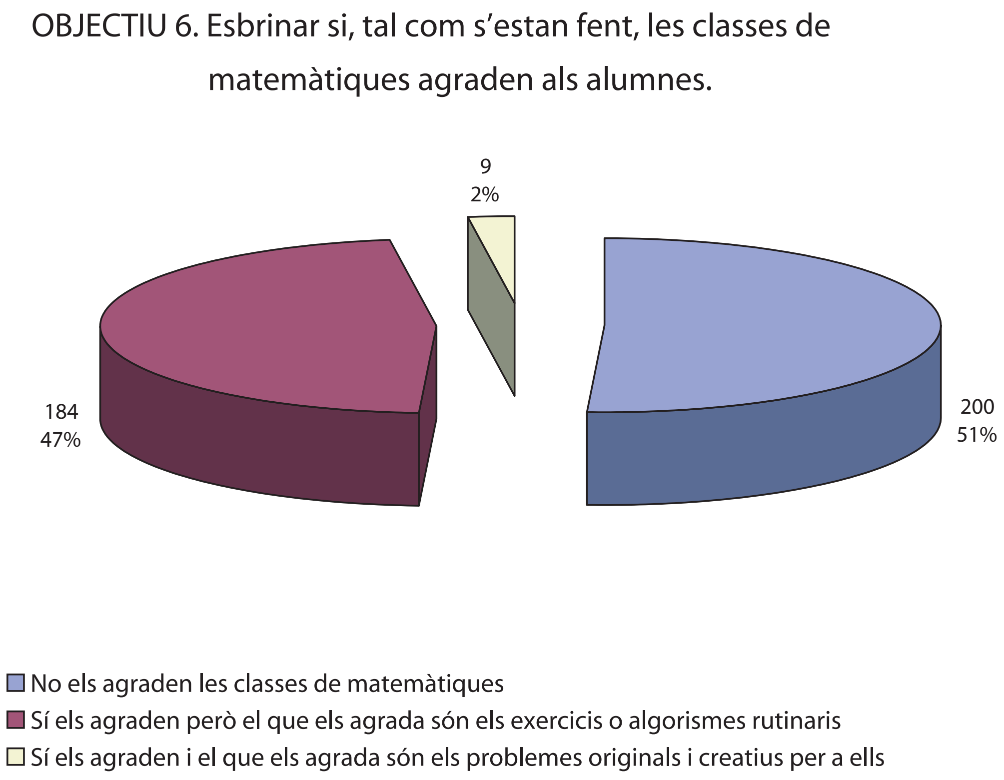

Figura 6.7: Resultats corresponents al sisè objectiu de la recerca.

en les implicacions didàctiques (sec. 6.10, pàg. 175).

6.8 Conclusions

Respecte del primer objectiu de la recerca

La comunitat d'experts defensa l'aplicació de la resolució de problemes a les aules de secundària i la normativa vigent ho contempla (sec. 6.3, pàg. 150). Per tal que això sigui possible cal que siguin problemes (sec. 1.6.2, pàg. 14) les activitats d'ensenyament i aprenentatge que es desenvolupen a l'aula, almenys una part d'elles. La definició que acceptem pel terme problema (sec. 1.6.1, pàg. 14) requereix que aquest tipus d'activitats portin cap a una fase de bloqueig i una d'exploració, que fa insuficient l'aplicació rutinària de les fórmules i els algorismes. El treball conjectural esdevé imprescindible si es pretén que l'ensenyament de la matemàtica tingui rellevància per tota la població a través de l'ensenyament obligatori (sec. 1.2, pàg. 3), si s'accepta l'objectiu essencial exposat a la pàgina IX. Per tant, negar el treball conjectural condueix a acceptar un ensenyament rutinari i no creatiu, tal com s'exposa i exemplifica en el marc teòric acceptat en aquest treball. Tots aquests fets han conduït a l'establiment del primer objectiu de la recerca: *Esbrinar si els alumnes conjecturen a l'aula*.

En la figura 6.2 de la pàgina 162 es pot veure que en el context que ens ocupa (sec. 6.2, pàg. 149), el treball conjectural és nul. De fet una part de l'alumnat sí que experimenta però aquesta experimentació no condueix a l'establiment de conjectures, tal com s'ha exposat en els resultats (pàg. 161). Ara bé, el perquè això succeeix obre tota una sèrie de preguntes que s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca.

Aquesta experimentació, que quan esdevé no condueix a l'establiment de conjectures, evidencia la presència de dues línies de treball paral·leles. Per un cantó, a vegades s'experimenta a les aules, però alhora s'exposen resultats tancats i acabats, evitant d'aquesta manera el procés de creació que condueix de l'experimentació als resultats. Les dades constaten un clar distanciament entre la gènesi i la transmissió dels coneixements (sec. 3.2.3, pàg. 57). L'experimentació entesa com a fase prèvia de la fase d'abstracció (sec. 3.2.4, pàg. 58) no és el que s'extreu de les dades recollides. El treball conjectural defensat per George Pólya (p. 6, pàg. 48) i el treball eurístic defensat per Pedro Puig Adam (p. 5, pàg. 62) expressen, entre d'altres, mancances educatives paleses a la vista de les dades recollides.

Respecte del segon objectiu de la recerca

L'ensenyament de la matemàtica que es dirigeix a tot l'alumnat ha de tenir relació directa amb les seves necessitats, amb el seu dia a dia i amb el món real, tal com s'ha exposat en el marc teòric d'aquest treball i tal com contempla la normativa vigent (veure el peu de pàgina 3, pàg. 150). Això ja és motiu suficient que justifica el segon objectiu, però a més, el benefici que en treu la ciència d'aquest enfocament el fa necessari tant en l'ensenyament obligatori com en el post-obligatori (sec. 1.2, pàg. 3). El segon objectiu d'aquesta recerca es va establir, per tant, com: *Esbrinar si els alumnes treballen problemes relacionats amb el món real*.

En la figura 6.3 de la pàgina 163 es pot veure que sí que es treballen problemes relacionats amb el món real (74%). Ara bé, els alumnes del context que ens ocupa (sec. 6.2, pàg. 149), tenen molta més facilitat per aplicar eines apreses a l'ensenyament primari (52%) que no pas d'apreses en l'ensenyament secundari (22%).

Fins a cert punt es pot considerar acceptable que sigui així, ja que la majoria de situacions quotidianes requereixen d'operacions elementals i sovint ens podem deixar ajudar per les Tecnologies de la Informació i de la Comunicació quan aquestes són més extenses. Hi ha eines matemàtiques que permeten aplicacions relacionades amb el món real, pròpies de l'ensenyament secundari, que tenen una forta incidència en les dades com poden ser les proporcions, percentatges, etc. Aquests resultats però conviden a la reflexió sobre quin interès poden tenir en l'ensenyament obligatori continguts com trigonometria, polinomis, equacions i d'altres, entre els quals sovint s'hi troben aplicacions ben allunyades de la realitat quotidiana.

En la secció 1.2 a la pàgina 3 he mirat de fer aquesta reflexió, des del meu punt de vista. Cadascuna de les persones que estem lligades al món de l'educació hauríem de fer una revisió, entre d'altres, de les nostres creences *versus* el que la societat ens demana. Aquesta i altres preguntes es desprenen dels resultats i s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca (sec. 6.9, pàg. 173).

Respecte del tercer objectiu de la recerca

Les dificultats que ens trobem en la vida real esporàdicament tenen una via de solució única que sempre funciona en situacions semblants. La resolució de problemes de diferents maneres pot conduir a establir patrons que, sota certes condicions, poden ajudar en resolucions posteriors. L'ensenyament de resultats segellats instrueix patrons, l'ensenyament creatiu guia cap a la seva construcció. Per tant, si acceptem l'objectiu essencial exposat a la pàgina IX, aleshores la resolució de problemes de diferents maneres es converteix en una tasca prioritària que condueix a relacionar-les i construir aquests patrons. En aquest treball s'exposen alguns exemples del que aquí es demana (pàgs. 23, 30, 34). Aportacions com les d'Arcavi (pàg. 80), Pólya (pàg. 23), Mason, Burton i Stacey (pàg. 68) així com d'altres autors que accepten els principis de George Pólya estableixen el marc teòric de referència.

Tot això va conduir, per tant, a establir el tercer objectiu de la recerca: *Esbrinar si els alumnes resolen problemes de més d'una manera*.

En la figura 6.4 de la pàgina 165 es pot veure que, a partir de les dades recollides, un 40% dels alumnes resolen els problemes d'una manera i abandonen el problema, no hi ha per tant reflexió entre diferents resolucions. Minsa és la quantitat d'alumes que resol problemes de més d'una manera així com també el que a més relacionin les diferents resolucions. Una part important (54%) afirma que sí que en resol de més d'una manera però quan se'ls demana una concreció (la que ells vulguin) no ho saben exemplificar.

D'aquestes dades podem concloure que resoldre problemes de més d'una manera sí que és present a les aules de secundària però que no és una pràctica habitual. En el context que ens ocupa (sec. 6.2, pàg. 149), que una petita part dels alumnes ho exemplifiquin correctament mentre que una part important acceptin aquest fet però no siguin capaços de posar un exemple corrobora aquesta afirmació. D'aquests resultats es desprenen preguntes que s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca (sec. 6.9, pàg. 173).

Respecte del quart objectiu de la recerca

Tots els avantatges que aporta la resolució de problemes no són assolibles si, en atenció a aquest estil d'ensenyament i aprenentatge, no s'aconsegueix recobrir el currículum establert d'activitats que fomentin la creativitat i el pensament crític. En atenció al marc teòric exposat, el treball experimental, l'observació, el treball conjectural i l'establiment de rigor en les conjectures per cadascun dels apartats del currículum és una tasca àmplia en la que, fins arribar a recobrir tots i cadascun dels apartats del currículum, probablement queda una forta tasca per realitzar, principalment per aconseguir que arribi a ser una realitat generalitzada a les aules. Tot i així, seria desitjable que almenys en alguns apartats del currículum, l'alumne hagués construït el seu propi coneixement a partir de la resolució de problemes. Aquesta és l'essència que ha donat peu al quart objectiu de la recerca: *Esbrinar si els alumnes construeixen la teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes*

En la figura 6.5 de la pàgina 166 es pot veure que, a partir de les dades recollides, la construcció de teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes és una pràctica quasi inexistent.

En el context que ens ocupa (sec. 6.2, pàg. 149), les dades recollides constaten que la resolució de problemes no arriba a les aules com un procés d'ensenyament i aprenentatge que partint de l'experimentació condueix a la construcció de resultats. S'aprecia un clar distanciament entre el que és la resolució de problemes i el que finalment es concreta en les aules. Entre d'altres, George Pólya va exposar que calia que fos l'alumne qui aprengués per ell mateix aquells coneixements que ens proposem (p. 3, pàg. 46), en particular els resultats que formen part dels objectius del currículum. El mètode de quatre passos (sec. 2.1, pàg. 21) i el raonament plausible (sec. 2.4, pàg. 44) de George Pólya, les fases de treball (sec. 3.3.4, pàg. 67) de Mason, Burton i Stacey o les fases (sec. 3.5, pàg. 74) de Miguel de Guzmán, estableixen un marc teòric que emfasitza la importància d'aquest objectiu.

Si aquest objectiu no s'assoleix aleshores, per tal de poder impartir els continguts corresponents a la programació del curs, altres estils d'ensenyament supleixen la construcció de la teoria a partir de la visió retrospectiva. D'aquesta manera és fàcil que esdevingui la instrucció de resultats des de diferents estils d'ensenyament (sec. 1.5.5, pàg. 12). D'aquests resultats es desprenen rellevants preguntes que s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca (sec. 6.9, pàg. 173).

Respecte del cinquè objectiu de la recerca

En general els alumnes fan servir a l'actualitat eines tecnològiques amb una certa comoditat. Per tal que en facin una correcta utilització cal que en la pràctica habitual disposin de guia i orientació ja que, en qualsevol cas, en faran servir. Les noves tecnologies poden integrar-se en l'ensenyament de la matemàtica amb finalitats diametralment oposades. Així, el software que permeti efectuar càlculs numèrics o simbòlics podria conduir a incrementar l'exposició de resultats tancats ja que les seves aplicacions poden ser exemples reals que, tot i que rutinaris, requereixin gran potència de càlcul. L'ordinador pot ser en canvi una eina que s'empri en la resolució de problemes per experimentar, observar, proposar conjectures i contrastar-les, en definitiva, una eina al servei de la creativitat que fomenti el pensament crític. Alhora és ben diferent experimentar, observar i conjecturar propietats amb Cabri-Géomètre, GeoGebra o Cinderella que passar un problema a net amb Word; però, entre d'altres, tots ells s'acostumen a englobar dins de la terminologia de TIC. És per això que en aquest cinquè objectiu no ens proposem només veure si els alumnes fan servir l'ordinador, sinó que a més ens proposem veure si aquest s'empra en el treball creatiu a les aules. I si aquest tipus de treball esdevé aleshores Cabri-Géomètre, Cinderella o Geogebra tenen un paper fonamental en l'ensenyament de la matemàtica. La no utilització d'aquest software és, quan l'alumne fa servir l'ordinador per fer matemàtica, un element més de no creativitat a les aules. Aquesta és l'essència que va suggerir la inclusió d'aquest cinquè objectiu en la recerca: *Esbrinar si els alumnes fan servir Cabri-Géomètre, GeoGebra, Cinderella o similars.*

El currículum proposa l'ús de l'ordinador per visualitzar construccions geomètriques i per realitzar simulacions. Si atenem a les aportacions de George Pólya (cap. 2, pàg. 21), Pedro Puig Adam (sec. 3.2, pàg. 56), Mason, Burton, i Stacey (sec. 3.3, pàg. 64), Alan Schoenfeld (sec. 3.4, pàg. 72) i Miguel de Guzmán (sec. 3.5, pàg. 74) aleshores l'ordinador ha de ser a més una eina d'experimentació per fomentar l'observació, el treball inductiu i el conjectural. A grans trets i a partir de les dades recollides tenim però que quasi la meitat dels alumnes sí que fan servir l'ordinador però no per realitzar amb un objectiu creatiu. L'ordinador no té per tant una utilització que de manera generalitzada fomenti la creativitat i, donat que quantitativament la utilització de les TIC va en augment, caldria reorientar la seva utilització. D'aquestes conclusions extretes a partir dels resultats obtinguts (pàg. 165) i relatius a aquest objectiu, en atenció al marc teòric que s'acaba de referenciar i en el context que ens ocupa (sec. 6.2, pàg. 149) es desprenen preguntes que s'exposaran en la prospectiva d'aquesta recerca (sec. 6.9, pàg. 173) i en les orientacions didàctiques (sec. 6.10, pàg. 175).

Respecte del sisè objectiu de la recerca

En tota activitat humana l'acord i el benestar entre les persones és més que fonamental. Ara bé, l'activitat en sí i el benestar poden presentar-se, en una primera aproximació, en quatre possibilitats que provenen del creuament entre benestar/malestar amb el correcte/incorrecte funcionament de l'activitat. L'òptim s'aconsegueix si en un clima de benestar l'activitat d'ensenyament i aprenentatge és òptima. Els climes de benestar, tant favorables des del punt de vista humà, dificulten però els canvis. És ben diferent, en atenció a aquesta recerca, que l'alumne estigui a gust davant de la realització de problemes creatius o amb la execució de fórmules o d'algorismes rutinaris. Aquesta és l'essència a partir de la qual es va establir aquest sisè i darrer objectiu de la recerca: *Esbrinar si, tal com s'estan fent, les classes de matemàtiques agraden als alumnes*.

A partir de les dades recollides veiem que a quasi la meitat de l'alumnat li agrada la realització d'exercicis rutinaris (47%) mentre que una petita part gaudeix amb els problemes creatius (2%). A poc més de la meitat de l'alumnat (51%) no li agrada les classes de matemàtiques tal com s'estan fent.

Aquestes conclusions mostren tendències més que no pas freqüències o presència d'un determinat fenomen. Des del punt de vista quantitatiu la mostra escollida és minsa (sec. 6.6.2, pàg. 157) si entenem que l'estudi va dirigit a la comunitat educativa catalana, però no és només un resultat quantitatiu el que es pretén obtenir. En la prospectiva (sec. 6.9, pàg. 173) s'obriran preguntes i en les implicacions didàctiques (sec. 6.10, pàg. 175) s'aportaran noves *possibilitats* didàctiques.

6.9 Prospectiva

Aquesta recerca ens diu que el treball conjectural no és una realitat a les aules i condueix, per tant, a mirar d'esbrinar el per què és tan minúscul en la realitat de les aules de secundària. Obre una nova perspectiva en la qual, si es vol que la resolució de problemes sigui una realitat a les aules, calen respostes a preguntes que requereixen de diferents línies de recerca:

1. La formació inicial dels docents a les facultats fomenta el treball conjectural? I la formació permanent?

2. És la normativa educativa prou explícita alhora d'exposar què s'entén per resolució de problemes i, en concret, com entén el professorat el terme resolució de problemes?

3. Els exàmens d'ingrés al cos de professors d'ensenyament secundari demanen problemes que calgui desenvolupar des de l'experimentació fins el rigor passant per la fase conjectural? Com es preparen aquestes proves d'accés? Es prioritza que els docents seleccionats fomentin la creativitat a les aules i l'esperit crític dels alumnes?

4. Els laboratoris/taller de matemàtiques amb recursos materials i informàtics que facilitin l'estil d'ensenyament que es defensa en aquesta recerca té aplicació des de fa anys en algun sistema educatiu del planeta? Quins resultats

ofereixen les recerques i diagnosis corresponents? Són aplicables al nostres sistema educatiu? Té la formació inicial dels docents en els països en qüestió molta diferència amb la que aquí reben els mestres i professors?

La recerca ens diu que els alumnes tenen molta més facilitat per aplicar a problemes del món real eines apreses a primària que no pas eines apreses a secundària.

5. Tenen els docents clar quin és l'objectiu final de l'ensenyament de la matemàtica a secundària? I a primària? I a al universitat? És la normativa prou explícita? Facilita la formació inicial a la universitat aquests tipus de reflexions?

A la vista dels resultats de la recerca veiem que els alumnes en general no resolen els problemes de diverses maneres i, si això esdevé, en la seva majoria no hi ha un reflexió que permeti construir la teoria a partir de la visió retrospectiva de la resolució de problemes.

6. Coneix el professorat l'ensenyament a través de la resolució de problemes? Se l'ha format per tal que ho posi en pràctica? La normativa explicita aquest terme de manera que no deixi marge de dubte sobre el que es demana? Es pregunten els docents amb quin objectiu cal ensenyar a través de la resolució de problemes? Quines avantatges i inconvenients té l'ensenyament algorísmic i rutinari?

Respecte de la utilització de l'ordinador hem vist que quan es fa servir és per efectuar procediments rutinaris però no per realitzar un ensenyament creatiu.

7. De quin software disposen els centres educatius? Amb quin propòsit? Es prepara els docents en la formació inicial a les universitats per tal que utilitzin aquest software? Quins són els avantatges i els inconvenients de la utilització de software a les aules de matemàtiques? Tot el software respon als mateixos objectius educatius? Quin es prioritza? Per què?

La recerca ens ha conduït a veure que a quasi la meitat dels alumnes li agrada les classes de matemàtiques en virtud dels procediments rutinaris mentre que a l'altra meitat no li agraden.

8. Quin és el nivell de satisfacció dels alumnes en els països que imparteixen de manera generalitzada un ensenyament a través de la resolució de problemes que prima l'experimentació i el treball conjectural? Hi ha una correlació alta entre el nivell de satisfacció de l'alumnat d'aquests països i les resultats de les diagnosis?

6.10 Implicacions didàctiques

Donat que estem en l'àmbit de l'educació, és interessant que la recerca aporti noves possibilitats didàctiques. Així, mostro una col·lecció d'idees que, essent possibilitats, podrien dinamitzar l'aplicació de l'estil d'ensenyament i aprenentatge exposat. Aquesta proposta no s'allunya del que ja diu la normativa (pàg. 42). A la vista del redactat d'aquesta sembla raonable que en cal un de més explícit sobre què es demana quan es fa referència a la resolució de problemes.

L'ensenyament que prioritza la creativitat de l'alumne i que fomenta el pensament crític requereix un paper del docent com a guia curricular que requereix d'una sòlida formació d'aquest. Seria convenient, per tant, facilitar la formació del professorat més enllà del que ja s'està fent. S'ha de reconèixer la labor del Departament d'Educació en la formació permanent del professorat però cal, si es pretén que el coneixement i el saber fer dels experts arribi als docents de secundària, emfasitzar la formació universitària de tercer cicle. L'ensenyament creatiu no es resol amb uns quants trucs ni una colla de recursos malgrat que cal valorar positivament. Cal també un saber fer per part del docent que no es pot transmetre en una formació telemàtica ni a distància. Respecte d'això destacaré alguns punts:

1. De la mateixa manera que el Departament d'Educació dóna facilitats per tal que el professorat realitzi cursos de formació permanent o formació en llengües estrangeres, també caldria que les donés en la formació presencial universitària de tercer cicle, en els cursos de doctorat o en el que en el nou pla es dirà la formació de post-grau. Cal tenir present que l'ensenyament creatiu requereix d'un saber fer per part del docent que difícilment es pugui transmetre a través de cursos tel·lemàtics i/o formació a distància; en qualsevol cas l'efecte d'aquest ensenyament no presencial seria de ben segur molt menor.

2. De la mateixa manera que MUFACE dóna ajudes econòmiques als professors d'ensenyament secundari que volen realitzar una altra llicenciatura. També caldria que aquestes ajudes fossin vàlides en la formació universitària de tercer cicle (el que en el següent pla d'estudis d'universitat es dirà la formació universitària de postgrau).

3. Els professors d'ensenyament secundari que volen participar, per exemple en un concurs de trasllats, disposen d'una puntuació per tenir el grau de doctor que, en ocasions, es veu superada per un any d'antiguitat. Una carrera universitària d'una altra especialitat té una puntuació semblant a la corresponent a un doctorat en l'especialitat que imparteix el professor en el seu dia a dia. Si es vol potenciar una sòlida formació del professorat caldria que

la formació universitària de tercer cicle (formació de postgrau) tingués una puntuació destacada.

Demanar al professorat que es formi més enllà del seu horari laboral requereix un esforç humà per part d'aquest que s'hauria de veure facilitat pel seu horari. Hi ha diversos factors que fan que l'horari dels docents dificulti la formació esmentada anteriorment. Caldria que el Departament d'Educació posés facilitats organitzatives que facilitessin aquesta millora horària, si es pretén fomentar aquesta formació d'alta qualitat, en particular:

4. Els currículums de secundària han proposat en els darrers anys una fragmentació en atenció a la diversitat de l'alumnat. Atenent els avantatges que aquesta organització pot suposar, no es pot oblidar que aquesta fragmentació (crèdits variables, optatives, grups flexibles, etc, amb diversos professors i grups actuant simultàniament a la mateixa hora, ...) dificulta el disseny i creació d'horaris. Els alumnes tenen un horari d'entrada i sortida aprovat pel consell escolar i és l'horari del professorat el que s'ha d'adaptar per tal sigui possible. Com a conseqüència, per exemple, un professor de secundària que té tres hores de classe un cert dia, es pot trobar que entra a primera hora del matí i surt a darrera hora de la tarda impossibilitant una formació d'alta qualitat a les universitats. Reconeixent la vàlua de les mesures d'atenció a la diversitat, cal prioritzar els horaris dels professors si es vol emfasitzar la formació universitària de tercer cicle.

5. Si el Departament d'Educació opta per avançar el començament de les classes a principis de setembre aleshores cal donar solució al disseny i creació dels horaris laborals del professorat, ja que el mes d'agost és mes de vacances per tots els docents. La complexitat exposada en punt 4 requereix de diverses setmanes per a la realització d'uns horaris que permetin la formació universitària de tercer cicle del professorat; no perdem de vista que molts professors no tenen una universitat al costat de casa seva. Així, si no es disposa de temps suficient, les presses condueixen a la manca de compacitat horària que impossibilita la citada formació. De la mateixa manera que es donen facilitats horàries a les persones per diversos motius, si es vol prioritzar la citada formació, aleshores també s'haurien de donar per motius formatius. Però descarregar aquesta responsabilitat una vegada més en les juntes directives torna a ser demanar, amb cada vegada menys temps, un fet que, cada vegada més difícil, s'acosta a la impossibilitat. Un organisme del Departament d'Educació o una empresa d'elaboració d'horaris docents podria recollir les peticions del professorat, en particular les formatives esmentades, i realitzar els horaris per tal que, entres d'altres, aquesta esdevingui possible. Si el Departament d'Educació vol incrementar l'horari

d'atenció a l'alumne aleshores hauria de pensar, per exemple, en la possibilitat de fer dos torns en l'horari dels docents. Un professor que anés al centre educatiu al matí podria formar-se per la tarda i un altre que hi anés per la tarda es podria formar pels matins, mentre que l'alumne estaria atès matí i tarda. Hi ha diverses possibilitats que facilitarien la formació universitària de tercer cicle i que podem resumir en:

- Torns horaris en els docents: torn de matí / torn de tarda.
- Organisme administratiu per al disseny i creació d'horaris.

6. Grups reduïts. Per tal que l'ensenyament de la matemàtica parteixi de l'experimentació i sigui l'observació i el treball conjectural el nucli des del qual es construeixi el coneixement, cal que el volum d'alumnes per aula sigui reduït. Per això s'hauria de pensar en l'aula de matemàtiques com una aula taller/laboratori on l'atenció a l'alumne pugui ser personalitzada.

Disseny i elaboració de l'instrument d'obtenció d'informació

Els resultats PISA i la prova de Competències Bàsiques motiven un estudi sobre l'aplicació de la resolució de problemes a les aules de secundària. La població objecte d'estudi és la comunitat educativa catalana i el centre d'interès el funcionament a l'aula de matemàtiques d'aquest estil d'ensenyament-aprenentatge. Les dificultats dels professors per impartir la resolució de problemes en sentit ampli i la dels alumnes per aprendre amb aquest estil queden reflectides a les diagnosis realitzades (pàg. 7). Donades les limitacions de temps així com de recursos, acoto el problema de recerca establint els objectius que s'exposen a continuació.

Els objectius i les qüestions de recerca aconsegueixen l'equilibri entre les prioritats que he establert així com els meus interessos, les limitacions de temps i econòmiques, el marc teòric i el context.

L'ús d'aquest qüestionari com a instrument d'obtenció d'informació i recollida de dades em permetrà posteriorment fer ús d'una estratègia que em permeti aprofundir en l'assoliment dels objectius.

Objectius

1. Esbrinar si els alumnes conjecturen a l'aula.
2. Esbrinar si els alumnes treballen problemes relacionats amb el món real.
3. Esbrinar si els alumnes resolen problemes de més d'una manera.
4. Esbrinar si els alumnes construeixen la teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes.
5. Esbrinar si els alumnes fan servir el Cabri-Géomètre, GeoGebra, Cinderella o similars.
6. Esbrinar si, tal com s'estan fent, les classes de matemàtiques agraden als alumnes.

La primera versió del qüestionari es va realitzar entre els mesos de novembre i desembre de 2005 i és la que s’exposa a continuació.

Qüestionari (versió de 22/12/2005)

1. Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.
2. Escriu una conjectura (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.
3. Treballeu a classe problemes relacionats amb el món real?
4. Escriu l’enunciat d’un problema relacionat amb el món real.
5. Escriu l’enunciat d’un problema relacionat amb el món real però que la seva resolució requereixi continguts que hagis après a secundària.
6. Has resolt a classe algun problema de més d’una manera?
7. Escriu l’enunciat d’un problema que puguis resoldre de més d’una manera.
8. Prioritza les paraules següents segons el teu coneixement d’elles. Posa un 1 a la més coneguda, un dos a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda:

   Càlcul, conjectura, fórmula

9. Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques.

   A - Primer fem la teoria i després els problemes.
   B - Comencem per un problema i a partir d’ell construïm la teoria.

10. Primer fem la teoria i després els problemes.
11. Comencem per un problema i a partir d’ell construïm la teoria.
12. Has fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?
13. Quan has acabat de resoldre un problema, comproves la solució? Si fas alguna cosa més explica-la.
14. T’agrada resoldre problemes de matemàtiques? Escriu l’enunciat d’un problema que t’agradi.

15. Consideres que les matemàtiques són importants per la teva vida? Per què?
16. Amb quina freqüència fas servir l'ordinador per fer matemàtiques a l'institut?..................... I a casa?...........................
17. Vols dir alguna cosa que no haguem preguntat?

Aquestes qüestions de recerca estan lligades als objectius segons la taula 2 de la pàgina 181.

Objectius-Qüestionari (versió de 22/12/2005)

	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	OBJ6
Q1	X					
Q2	X					
Q3		X				
Q4		X				
Q5		X				
Q6			X			
Q7			X			
Q8	X					
Q9				X		
Q10					X	
Q11				X		
Q12						X
Q13						X
Q14					X	
Q15						

Taula 2: Taula que recull els vincles entre els objectius de la recerca i les preguntes del qüestionari amb el qual es pretén obtenir la informació. Versió preliminar de (versió de 22/12/2005)

Aquest va ser el punt de partida de la reunió amb la Doctora Gorgorió. Les seves aportacions, principalment les relatives a l'ordre de les qüestions i a la comprensió, atenent que van dirigides a alumnes de secundària obligatòria, van donar lloc a la segona versió del qüestionari. En aquesta versió i les posteriors no exposo els objectius ja que aquests no van variar.

Qüestionari (versió de 10/01/2006)

1. Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.
2. D'entre les tres paraules següents posa un 1 a la que per a tu sigui més coneguda, un dos a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda:

Càlcul, conjectura, fórmula

3. Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques.

   A - Primer fem la teoria i després els problemes.
   B - Comencem per un problema i a partir d'ell construïm la teoria.

4. Heu fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?
5. Treballeu a classe problemes relacionats amb coses del dia a dia?
6. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia.
7. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia que quan feies primària no hauries sabut fer.
8. Resoleu a classe problemes de més d'una manera?
9. En el cas que recordis un problema que puguis resoldre de més d'una manera, escriu l'enunciat.
10. Quan acabeu de resoldre un problema, comproveu la solució? Si feu alguna cosa més explica-la.
11. T'agrada resoldre problemes de matemàtiques? Escriu l'enunciat d'un problema que t'agradi.
12. Què és el que t'agrada i què és el que no t'agrada de la classe de matemàtiques?
13. Escriu una conjectura (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.
14. De quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques?
15. Vols dir alguna cosa que no haguem preguntat?

Aquestes qüestions de recerca estan lligades als objectius segons la taula 3 de la pàgina 183.

Amb aquesta segona versió del qüestionari em vaig entrevistar amb el Doctor Deulofeu el dia 10 de gener de 2006. Les seves aportacions van conduir a la tercera versió del qüestionari.

Objectius-Qüestionari (versió de 10/01/2006)

	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	OBJ6
Q1	X					
Q2	X					
Q3			X			
Q4					X	
Q5		X				
Q6		X				
Q7		X				
Q8			X			
Q9				X		
Q10				X		
Q11						X
Q12						X
Q13	X					
Q14					X	
Q15						

Taula 3: Taula que recull els vincles entre els objectius de la recerca i les preguntes del qüestionari amb el qual es pretén obtenir la informació. Versió preliminar de (versió de 10/01/2006)

Qüestionari (versió de 13/01/2006)

1. Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.

2. D'entre les tres paraules següents posa un 1 a la que per a tu sigui més coneguda, un dos a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda:

   Càlcul, conjectura, fórmula

3. Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques.

   A - Primer fem la teoria i després els problemes.
   B - Comencem per un problema i a partir d'ell construïm la teoria.

4. Heu fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?

5. Treballeu a classe problemes relacionats amb el món real?

6. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia.

7. Quan trobes la solució d'un problema, comproves si és correcte? Després d'això, feu alguna cosa més? Explíca-la.

8. T'agrada resoldre problemes de matemàtiques? Escriu l'enunciat d'un problema que t'agradi.

9. Què és el que t'agrada i què és el que no t'agrada de la classe de matemàtiques?

10. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia que quan feies primària no hauries sabut fer.

11. Resoleu a classe problemes de més d'una manera?

12. En el cas que recordis un problema que puguis resoldre de més d'una manera, escriu l'enunciat.

13. Escriu un resultat matemàtic (pots triar el que vulguis) que hagis obtingut a través d'alguna experiència. Escriu el resultat i explica l'experiència.

14. De quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques?

15. Vols dir alguna cosa que no haguem preguntat?

Aquestes qüestions de recerca estan lligades als objectius segons la taula 4 de la pàgina 185.

La setmana del 16 al 20 de gener de 2006 es va passar aquesta versió del qüestionari a dues alumnes del darrer curs de primària. L'objectiu era valorar la comprensió de les preguntes. També es volia veure si la realització del qüestionari els cansava molt, si el trobaven massa llarg i si, a causa d'aquest cansament, no van escriure tot el que voldrien en les darreres preguntes. Ambdues van trobar que el qüestionari no era llarg, no es van cansar i el que no van respondre no ho sabien tot i que comprenien el que se'ls demanava. En general, per tant, la comprensió era bona però en la qüestió tretze es van detectar dificultats que van donar lloc a la quarta versió del qüestionari que es mostra a continuació.

Qüestionari (versió de 23/01/2006)

1. Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica perquè serveix.

2. D'entre les tres paraules següents posa un 1 a la que per a tu sigui més coneguda, un dos a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda:

Objectius-Qüestionari (versió de 13/01/2006)

	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	OBJ6
Q1	X					
Q2	X					
Q3			X			
Q4					X	
Q5		X				
Q6		X				
Q7				X		
Q8						X
Q9						X
Q10		X				
Q11			X			
Q12				X		
Q13	X					
Q14					X	
Q15						

Taula 4: Taula que recull els vincles entre els objectius de la recerca i les preguntes del qüestionari amb el qual es pretén obtenir la informació. Versió preliminar de (versió de 13/01/2006)

Càlcul, conjectura, fórmula

3. Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques.

   A - Primer fem la teoria i després els problemes.
   B - Comencem per un problema i a partir d'ell construïm la teoria.

4. Heu fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?

5. Treballeu a classe problemes relacionats amb el món real?

6. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia.

7. Quan trobes la solució d'un problema, comproves si és correcte? Després d'això, feu alguna cosa més? Explica-ho.

8. T'agrada resoldre problemes de matemàtiques? Escriu l'enunciat d'un problema que t'agradi.

9. Què és el que t'agrada i què és el que no t'agrada de la classe de matemàtiques?

10. Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia que quan feies primària no hauries sabut fer.

11. Resoleu a classe problemes de més d'una manera?

12. En el cas que recordis un problema que puguis resoldre de més d'una manera, escriu l'enunciat.

13. Escriu un resultat matemàtic (pots triar el que vulguis) que hagis obtingut a través d'alguna experiència (per exemple retallant cartolina i combinant els trossos, o movent i contant diversos objectes, ...). Escriu el resultat i explica l'experiència.

14. De quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques?

15. Vols dir alguna cosa que no haguem preguntat?

Aquestes qüestions de recerca estan lligades als objectius segons la taula 5 de la pàgina 186.

Objectius-Qüestionari (versió de 23/01/2006)

	OBJ1	OBJ2	OBJ3	OBJ4	OBJ5	OBJ6
Q1	X					
Q2	X					
Q3				X		
Q4					X	
Q5		X				
Q6		X				
Q7				X		
Q8						X
Q9						X
Q10		X				
Q11			X			
Q12			X			
Q13	X					
Q14					X	
Q15						

Taula 5: Taula que recull els vincles entre els objectius de la recerca i les preguntes del qüestionari amb el qual es pretén obtenir la informació. Versió preliminar de (versió de 23/01/2006)

Efectuada la prova pilot i aplicades les modificacions pertinents, tal com es pot veure en aquesta quarta versió del qüestionari, vaig passar-lo, previ a ser definitiu, al Dr. Deulofeu i a la Dra. Gorgorió. Les seves aportacions van suggerir detalls que, tot i que en ocasions subtils, són rellevants donada la repercussió que podrien tenir en els resultats i, per tant, es van tractar amb el mateix rigor que les primeres versions i que la definitiva. Donat que són petites apreciacions no mostro cadascun d'ells per separat sinó que directament mostro el qüestionari que es va passar als alumnes (pàgs. 188- 191).

Aquest qüestionari definitiu disposa en el moment de passar-lo als alumnes d'un quadre adjunt que conté els objectius, la taula que relaciona les qüestions de recerca amb els objectius i una classificació inicial per categories que essent prèvia a l'anàlisi és més que provisional (pàg. 192).

Qüestionari

Dades personals Cal que encerclis tres dades: dia de naixement, mes de naixement i gènere																	
Dia de naixement					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Mes de naixement					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Gènere					Noi			Noia									

Amb aquest qüestionari es pretén obtenir informació que ajudi a millorar la qualitat de les classes de matemàtiques. Et preguem que responguis amb la màxima sinceritat tot allò que et demanem.

1.- Escriu una fórmula (pots triar la que vulguis) i explica per a què serveix.

2.- D'entre les tres paraules següents posa un 1 a la que per a tu sigui més coneguda, un 2 a la segona més coneguda i un 3 a la més desconeguda.

Càlcul ☐ Conjectura ☐ Fórmula ☐

3.- Encercla la situació que sigui més habitual a la classe de matemàtiques (A o B). Si cap de les dues és la situació habitual encercla Ca p i explica quina és.

A Primer fem la teoria i després els problemes

B Comencem per un problema i a partir d'ell construïm la teoria

Cap En aquest cas explica la situació que sigui més habitual:

4.- Heu fet servir algun programa informàtic per fer matemàtiques? Quin o quins?

5.- Treballeu a classe problemes relacionats amb el món real?

6.- Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia.

7.- Quan trobes la solució d'un problema, comproves si és correcta?
Després d'això, feu alguna cosa més?
Explíca-ho.

8.- T'agrada resoldre problemes de matemàtiques?
Escriu l'enunciat d'un problema que t'agradi.

9.- Què és el que t'agrada i què és el que no t'agrada de la classe de matemàtiques ?

10.- Escriu l'enunciat d'un problema relacionat amb coses del teu dia a dia que quan feies primària no hauries sabut fer.

11.- Resoleu a classe problemes de més d'una manera?

12.- En el cas que recordis un problema que puguis resoldre de més d'una manera, escriu l'enunciat.

13.- Escriu un resultat matemàtic (pots triar el que vulguis) que hagis obtingut a través d'alguna experiència (per exemple retallant cartolina i combinant els trossos, o movent i contant diversos objectes, ...).
Escriu el resultat i explica l'experiència.

14.- De quina manera ens pot ajudar l'ordinador a fer matemàtiques?

15.- Vols dir alguna cosa que no t'haguem preguntat?

Objectius

1.- Esbrinar si els alumnes conjecturen a l'aula.
2.- Esbrinar si els alumnes treballen problemes relacionats amb el món real.
3.- Esbrinar si els alumnes resolen problemes de més d'una manera.
4.- Esbrinar si els alumnes construeixen la teoria a partir de la visió retrospectiva en la resolució de problemes.
5.- Esbrinar si els alumnes fan servir el Cabri-Géomètre, GeoGebra, Cinderella o similars.
6.- Esbrinar si, tal com s'estan fent, els agraden les classes de matemàtiques als alumnes.

Lligam entre els objectius i les qüestions de recerca

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15
OB 1	X	X											X		
OB 2					X	X				X					
OB 3											X	X			
OB 4			X				X								
OB 5				X										X	
OB 6								X	X						

CATEGORIES INICIALS					
OBJECTIU 1	OBJECTIU 2	OBJECTIU 3	OBJECTIU 4	OBJECTIU 5	OBJECTIU 6
No experimenten i no conjecturen.	No, no en treballen.	Els problemes es resolen d'una manera i s'abandonen.	No treballen la visió retrospectiva.	No fan servir l'ordinador.	No els agraden les classes de matemàtiques.
Experimenten però no conjecturen. Justifiquen fórmules i algorismes.	Sí, en resolen però de primària.	Es resolen de més d'una manera però no es relacionen les diferents resolucions.	Treballen la visió retrospectiva però no construeixen teoria a partir d'ella.	Fan servir l'ordinador per calcular però no per conjecturar resultats.	Sí els agraden però el que els agrada són els exercicis o algorismes rutinaris.
Conjecturen resultats.	Resolen problemes relacionats amb el món real. De secundària també.	Es resolen de més d'una manera i es relacionen les diferents resolucions.	Treballen la visió retrospectiva i construeixen teoria a partir d'ella.	Fan servir l'ordinador per conjecturar resultats.	Sí els agraden i el que els agrada són els problemes originals i creatius per a ells.

Bibliografia

ALEXANDERSON, Gerald (2000): *The random walks of George Pólya*. Washington: The Mathematical Association of America.

ARCAVI, Abraham (1999): «... y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?» *Tenerife: Números (revista de didáctica de las matemáticas).*, volum 38. Pàgs. 39-56.

BARTROLÍ BRUGUÉS, Jaume (1998): «Activitats de geometria amb ordinador per a eso». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

BEATON, A.E.; *et al.* (1996): *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Boston: TIMSS International Study Center.

BICKMORE-BRAND, J (1997): *Teachers of mathematics teach mathematics differently: A case study of two teachers*. Tesi Doctoral, Perth and Bunbury (Western Australia): Edith Cowan University.

BOURNE, Lyle Eugène; EKSTRAND, Bruce R.; DOMINOWSKI, Roger L. (1975): *Psicología del pensamiento*. México, D.F.: Trillas. Traducción: Dolores Mercado; revisión técnica: Serafín Mercado Domenech.

BRANSFORD, John D.; STEIN, Barry S. (1986): *Solución IDEAL de problemas: guía para mejor pensar, aprender y crear*. Barcelona: Labor.

BRUNER, Jerome S. (1991): *Actos de significado: más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza. Traducción: Juan Carlos Gómez Crespo.

— (1996): *The Culture of education*. Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press.

BUENDÍA, I.; COLÁS, M.P.; HERNÁNDEZ, F. (1999): *Métodos de investigación en psicopedagogía*. Madrid: McGraw-Hill.

PLA I CARRERA, Josep (1998): *Damunt les espatlles dels gegants*. Barcelona: Edicions la Magrana. Premi de Literatura Científica.

CITMS (1985): *Las Matemáticas sí cuentan: informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matématicas en las Escuelas bajo la presidencia de W. H. Cockroft.* Madrid: Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado (Ministerio de Educación y Ciencia). Gran Bretanya: Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools.

COBO LOZANO, Pedro (2004): «Disseny d'agents pedagògics intel·ligents per millorar les competències estratègiques de l'alumnat en la resolució de problemes de matemàtiques». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Educació.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert (1979): *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar, cinquena edició. Traducción: Luis Bravo Gala.

DALMAU, Carles (1933): *Enciclopedia Cíclico-Pedagógica. Grado Superior. Material escolar de la casa editorial Dalmáu Carles, Pla. S. A.: curso 1933-34*. Gerona-Madrid: D.C.P.

DE CORTE, E.; VERSCHAFFEL, L. (1989): *Teaching word problems in the Primary School: What Research has to say to the teacher*. London: Routledge.

DEWEY, John (1989): *Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Barcelona: Paidós.

DOSSEY, J.; *et al.* (1988): *The mathematics report card: are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment*. Princeton (USA): Educational Testing Service.

ELLIOTT, J. (1978): «What is action-research in the school?, journal of curriculum studies.» Report tècnic, Seminario de Málaga. Traducció al castellà: Métodos y técnicas de investigación social en las escuelas.

EUCLIDES (1954): *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna: libros I-IV; Federico Enriques*. Madrid: C.S.I.C, Instituto Jorge Juan.

FIBONACCI, Leonardo (2002): *Fibonacci's Liber abaci*. New York: Springer. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of calculation by Laurence Sigler.

FREUDENTHAL, Hans (1961): *The Concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences: proceedings of the Colloquium sponsored* *by the Division of Philosophy of Sciences of the International Union of History and Philosophy of Sciences organized at Utrecht*. Dordrecht: Reidel.

— (1973): *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

— (1983): *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.

— (1991): *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CASTELLSAGUER I GUANYABENS, Joaquim (2000): «Recursos internet per a l'ensenyament de les matemàtiques: la web armilar». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

DE GUZMÁN, Miguel (1991*a*): «El paper del matemàtic enfront els problemes de l'educació matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (2a etapa)*, volum 6. Pàgs. 13-21.

— (1991*b*): *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.

— (1992): «Tendències innovadores en educació matemàtica». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques (2a etapa)*, volum 7. Pàgs. 7-34.

HADAMARD, Jacques (1947): *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa-Calpe. Traducción: Luis Santaló Sors.

— (1996): *The Mathematician's mind: the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton (New Jersey): Princeton University Press.

HALMOS, Paul R. (1980): «The heart of the mathematics». *Washington: American Mathematical Monthly*. Vol. 87, pàgs. 519-524.

HERNÁNDEZ, Jesús (1991): «L'ofici de matemàtic i l'ensenyament de les matemàtiques». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, volum 6. Pàgs. 42-53.

HULL, L. W. H. (1973): *Historia y filosofía de la ciencia*. Barcelona: Ariel. Traducción: Manuel Sacristán.

JANVIER, Claude (1987): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale (New Jersey): Lawrence Erlbaum.

KILPATRICK, Jeremy (1994): *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

KLINE, Morris (1972): *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.

— (1985): *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI de España.

— (1986): *El Fracaso de la matemática moderna: ¿por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid: Siglo XXI de España.

KRULIK, Stephen (1989): *Problem solving: a handbook for teachers*. Boston: Allyn and Bacon.

KRULIK, Stephen; RUDNICK, Jesse A. (1994): «La reflexión: estrategias para razonar y resolver problemas». *Reston (USA): Arithmetic Teacher*. Volum 41, número 6, pàgs. 334-338.

KRUTETSKII, V.A. (1976): *The Psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago. Translated from the russian by Joan Teller; edited by Jeremy Kilpatrick and Izaak Wirszup.

LABARRERE SARDUY, Alberto (1988): *Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

LAKATOS, Imre (1979): *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

— (1981*a*): «La crítica y la metodología de programas científicos de investigación». *Murcia: Teorema*.

— (1981*b*): *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza.

MASIP TREIG, Santiago (2000): «La geometria a l'educació secundària: Anàlisi i elaboració de recursos pedagògics». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

MASON, John; BURTON, Leone; STACEY, Kaye (1988): *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

MILDREN, J.; ELLERTON, N.F.; STEPHENS, M. (1990): «Children's mathematical writing -a window into cognition». *Brunswick Melbourne (Australia): Mathematical Association of Victoria*.

MIRALLES, Joan; DEULOFEU, Jordi (2005): «Historia y enseñanza de la matemática: Aproximaciones de las raíces cuadradas». *México: Educación Matemática*, volum 17.

MOON, Bob (1986): *The «new maths» curriculum controversy*. London: The Falmer Press.

MURILLO, M.; BRENES, V. (1994): «Algunos objetos de estudio del constructivismo». *San José de Costa Rica: Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa.* Universidad Estatal a Distancia (pàgs. 373–378).

NCTM (1988): *An Agenda for action: recommendations for school mathematics of the 1980s*. Reston (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

PÓLYA, George (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

— (1981): *Mathematical discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving*. New York: Wiley.

— (1987): *Cómo plantear y resolver problemas*. Mexico: Trillas. Decimocuarta reimpresión. Primera edición en español, 1965.

— (1994): *Métodos matemàticos de la ciencia*. Madrid: Dis-Euler. Traducción: Pilar Ossorio Carrera; revisión científica: Javier Rodanés Ovejas.

POL MASJOAN, Anna (1988): «Una metodologia per al tractament de la diversitat a l'eso, en l'àmbit de la resolució de problemes de matemàtiques». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

PUIG, Luis; CERDÁN, Fernando (1988): *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

PUIG ADAM, Pedro (1956): *Didáctica matemática eurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

— (1960): *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

— (1979): «El que podria ésser l'ensenyament de la matemàtica a l'institut escola». *Barcelona: Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, volum 1. Pàgs. 19-30. Presentació de Joan Casulleres.

PUJOL, Romà; ARIAS, José María; MAZA, Ildefonso (1999): *Estadística*. Barcelona: Casals.

PUJOL, Romà; ÁLVAREZ, Ramón (1997): *L'altra geometria*. Barcelona: Casals.

REY PASTOR, Julio (1976): *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Biblioteca Matemática.

REY PASTOR, Julio; PUIG ADAM, Pedro (1933): *Metodología y didáctica de la matemática elemental: para uso de los alumnos de escuelas normales y aspirantes al profesorado de 1ª y 2ª enseñanza*, volum 1, Metodología. Madrid: A. Marzo.

— (1935): *Matemáticas. Tercer curso*, *Aritmética*, volum 1. Madrid: Unión Poligráfica.

ROBERVAL, Gilles (1996): *Éléments de géométrie de G.P. de Roberval*. Paris: Librairie philosophique J. Vrin. Textes réunis et présentés par Vincent Jullien.

SCHOENFELD, Alan H. (1976): *Space and geometry: papers from a Research Workshop; J. Larry Martin, editor, David A. Bradbard, technical editor*. Columbus, EEUU: ERIC: Center for Science, Mathematics and Environmental Education.

— (1983): *Problem solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations, and an annotated bibliography*. Rochester: The Mathematical Association of America.

— (1985): *Mathematical problem solving*. Orlando (Fla.): Academic Press.

— (1987): *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale (N.J.): Erlbaum.

— (1988): «When good teaching leads to bad results: The disasters of «well-taught» mathematics courses.» *Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers: Educational Psychologist*, volum 23. Pàgs. 498-504.

— (1992): «Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics». *New York: MacMillan: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Pàgs. 334-370.

— (1994): *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

SINGH, Simon (2004): *El enigma de Fermat*. Barcelona: Planeta.

SPENCER, Herbert (1874-1875): *Principes de psychologie*. Paris: Germer Baillière. Traduits sur la nouvelle édition anglaise par Th. Ribot et A. Espinas.

STENHOUSE, L. (1984): *Investigación y desarrollo del currículum.* Madrid: Morata.

STOYANOVA, E (1997): *Extending and exploring students' problem solving via problem posing. A study of Years 8 and students involved in Mathematic Challenge and Enrichment Stages. Eluer Enrichment Program for young Australians.* Tesi Doctoral, Edith Cowan University. Perth. Western Australia.

SWELLER, John; CHANDLER, Paul (1994): «Why some material is difficult to learn». *Lawrence Erlbaum Associates: Cognition and instruction*, volum 12.

VILA CORTS, Antoni (1997): «La resolució de problemes de matemàtiques a l'educació secundària obligatòria: Elaboració d'un material transversal, gestió de la classe i avaluació». Report tècnic, llicència d'estudis concedida pel Departament d'Ensenyament.

VIVIANI, Vincenzio (1970): *De maximis et minimis, geometrica divinatio: in qvintvm Conicorvm Apollonii Pergæi adhvc desideratvm.* Col·lecció Landmarks of science. New York: Readex Microprint Corporation. Florentiæ: Apud Ioseph Cocchini, typis Nouis, 1659.

WALLAS, Graham (1926): *Art of Thought.* New York: Harcout Brace.

Índex de figures

Índex de taules