LA MÀGIA DEL SISTEMA BINARI

Joan Carles Ferrer.
ADEMGI. Universitat de Girona.

1. Introducció.

És conegut i familiar per a tots nosaltres el sistema decimal de numeració. Justament, a l'inici d'aquestes Jornades, vàrem fruir de valent quan l'Anton Aubanell ens explicava les apassionants aventures i desventures que es visqueren a l'establir el sistema mètric decimal.

Però sabem que el sistema decimal no és la única base de numeració, sinó que podem prendre qualsevol número com a base. Segurament s'ha estès l'ús del sistema decimal perquè tenim deu dits a les mans (com sabem la paraula "dígit" ve de "dit"), però històricament també s'han emprat altres sistemes de numeració dels quals encara ara en queden alguns vestigis (sistema sexagesimal, hexadecimal, duodecimal, etc.).

L'eficiència del sistema decimal és inqüestionable, però està bé saber que hi ha d'altres llenguatges i simbologies per expressar les quantitats. De fet, hi ha cultures que construeixen l'aritmètica basant-se en d'altres sistemes de numeració, tot i que el substrat últim de l'aritmètica és el mateix. Diuen que si la Mars Lander –que, com va explicar l'Anton no va arribar a Mart perquè es varen confondre en la utilització del sistema mètric (els milions anglesos no són els milions americans)– hagués trobat uns "marcianets" amb dotze dits a les mans, potser farien servir el sistema duodecimal. I, qui sap, si no tinguessin dits a les mans, potser el que farien servir és el sistema binari.

El sistema binari de numeració es basa en les potències de 2, i, lògicament, només utilitza dos símbols per expressar les quantitats numèriques: el 0 i l'1. En aquest aspecte és molt simple, però, com a contrapartida necessita molts dígits si hem d'expressar un número gran.

Durant molt de temps el sistema binari de numeració va ser poc més que una curiositat. Però amb l'aparició dels ordinadors, els sistemes de codificació a base de zeros i uns va esdevenir eficaç. Els primers prototipus d'ordinadors es varen dissenyar per operar amb el sistema decimal, i, al necessitar deu intensitats diferents, sovint es produïen fallades. Quan es va adoptar un sistema de codificació binària, només calien dues intensitats diferents i es va guanyar molt en eficàcia. De fet, la paraula BIT, que expressa la unitat mínima de memòria d'un ordinador (la que pot emmagatzemar un 0 o un 1), és l'abreviació de Binary digIT.

En aquest taller abordarem alguns aspectes del sistema binari de numeració des d'una perspectiva lúdica, que també ens ajudarà a entendre els seus principis de funcionament.

2. Transmissió del pensament.

Començarem amb un divertit i enginyós joc que és tot un clàssic dels jocs de màgia al més pur estil "*màgia Borràs*". Es tracta d'un joc bastant conegut, del que alguns alumnes saben simplement que funciona per un artilugi matemàtic, i l'explicació del qual ens servirà d'excusa per introduir el sistema binari de numeració.

L'efecte consisteix en el següent:
Proporcionarem a un amic nostre un llistat de 31 objectes (pot ser una llista d'artistes de cinema, o simplement una llista d'objectes quotidians, o una sèrie de refranys curiosos, o, com deia sempre la meva àvia, del que ens passi per la barretina en el moment de fer-la) que prèviament haurem construït. Com vegeu, cada alumne pot construir-se la seva pròpia llista per quan vulgui realitzar el joc a un altre seu amic. Suposem que tenim un llistat de personatges del cinema.

Aleshores demanarem al nostre amic que esculli un dels artistes cinematogràfics de la llista i que es concentri intensament amb el personatge que hagi escollit. Tot seguit, com aquell qui no vol la cosa, li donarem 5 targes de colors diferents (per exemple de colors blau, groc, verd, vermell i lila), d'entre les quals li demanarem que aparti (pot ser guardant-les a la butxaca) aquelles targes que no tinguin el seu personatge, i que deixi cap per avall sobre la taula (sense que els noms dels personatges siguin visibles) la resta de targes que sí contenen l'artista que ell ha pensat.

Després de sol·licitar al nostre amic que es concentri amb el seu artista favorit, i abans que s'ens adormi, tant si es concentra bé com malament li endevinem l'artista dels seus somnis.

L'interès per saber com ho hem fet ens dona entrada a explicar el sistema binari de numeració.

3. El sistema binari de numeració.

Així com el sistema decimal de numeració està basat en les potències de 10 i necessita de 10 dígits per fer la representació de les quantitats, el sistema binari es basa en les potències de 2 i necessita només de dos dígits: el 0 i l'1.

D'aquesta manera si, per exemple, en el sistema decimal el número 3605 representa:
$3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$, en el sistema binari el número 11010 representa la quantitat $1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$, és a dir, 26 en la seva equivalència decimal. Escriurem:

$11010_{(2} = 26_{(10}$

La traducció binària d'un número expressat en forma decimal podem obtenir-la seguint el procediment invers, el que s'aconsegueix dividint successivament l'expressió decimal entre 2.

Així, per exemple, l'expressió binària del número 11 l'obtindrem fent:

$11_{(10} = 5 \cdot 2 + 1 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = 2^3 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1011_{(2}$

D'aquesta manera, si tenim una llista de 31 artistes de cinema, numerats de l'1 al 31, construïm les targes per a la transmissió del pensament a partir de la traducció binària d'aquests números tal i com s'ensenya en el quadre següent:

expressió decimal	expressió binària				
	2^4 tarja lila	2^3 tarja vermella	2^2 tarja verda	2^1 tarja groga	2^0 tarja blava
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1
2	0	0	0	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	1
6	0	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1
8	0	1	0	0	0
9	0	1	0	0	1
10	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	1
12	0	1	1	0	0
13	0	1	1	0	1
14	0	1	1	1	0
15	0	1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

D'aquesta manera, a la tarja de color lila, corresponent a la potència $2^4 = 16$, hi escriurem els noms dels personatges corresponents als números 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 i 31, que són els que tenen un 1 a la columna corresponent en la seva traducció binària.

A la tarja vermella, que correspon a la potència $2^3 = 8$, hi escriurem els noms dels personatges corresponents als números 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 i 31.

A la tarja verda, que correspon a la potència $2^2 = 4$, hi escriurem els noms dels personatges corresponents als números 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30 i 31.

Tot seguit a la tarja groga, que correspon a la potència $2^1 = 2$, hi escriurem els noms dels personatges corresponents als números 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30 i 31.

Finalment, a la tarja blava, que correspon a la potència $2^0 = 1$, tocarà escriure-hi els noms dels personatges que corresponen als números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29 i 31.

A partir d'aquí, sabent que el color blau correspon al número 1, el verd al 2, el groc al 4, el vermell al 8 i el lila al 16, resulta que amb la simple observació de les targes que queden sobre la taula podrem "*captar*" l'artista amb el que està concentrat el nostre amic, ja que aquests colors ens donen la codificació binària del número decimal corresponent a l'artista pensat.

Així, per exemple, si ha pensat amb l'artista que correspon al número 17 de la llista, quedaran sobre la taula la tarja lila (que correspon al 16) i la blava (corresponen a l'1) que són les úniques que contenen al personatge 17. Això ens permetrà endevinar "*telepàticament*" (sumant 16 + 1) que està pensant amb el número binari $10001_{(2}$, que és el mateix que dir el 17 en expressió decimal.

4. Jocs lògics.

Com hem vist, la senzillesa del sistema binari resideix en el fet que només utilitza 2 símbols: l'1 i el 0, que també poden representar el SI i el NO (és o no és a la tarja), l'OBERT i el TANCAT, el TOT i el RES, el SER i el NO SER, la VERITAT i la MENTIDA. Leibniz pensava que la bellesa del sistema binari rau en el fet que tot número pot ser representat a partir de la combinació entre el SER i el NO SER, i és també amb aquests dos símbols que poden representar l VERITAT i la MENTIDA amb els que s'estructura la coneguda àlgebra de Boole.

La conjunció i la disjunció amb aquests símbols ens permet divertir-nos amb la invenció i resolució de problemes lògics bivalents, és a dir, problemes constituïts per frases a les quals només els donem el valor de certes o falses, i que no admetin cap mena de matisació, contràriament al que passa amb la lògica borrosa que permet matisar el grau de veritat d'una proposició.

Suposem, com a exemple, que l'Albert, en Bernat i la Carmina formen un conjunt musical i que es verifiquen les següents condicions:

1. Si l'Albert no canta, en Bernat canta.
2. Si la Carmina no xiula, l'Albert i en Bernat canten alhora.
3. Si en Bernat no canta, l'Albert no canta o la Carmina no xiula.

Què fa en Bernat?. I els altres, es pot saber que fan?.

Ens ajudarà a resoldre l'entrellat del problema l'expressió binària dels números del 0 al 7, que serviran per representar les diverses situacions possibles de veritat o falsedat:

	Albert	Bernat	Carmina
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

D'aquesta manera, per exemple, el número binari 010 representa: l'Albert no canta, en Bernat canta i la Carmina no xiula.

Així, amb la primera condició eliminem les possibilitats 000 i 001.
Per la segona condició eliminem 010 i 100.
Finalment, per la tercera condició eliminem 101.

Per tant, només són coherents amb les condicions les possibilitats 011, 110 i 111. Així, el que és clar és que en Bernat canta. Els altres no sabem que fan; ara bé, si l'Albert no canta, la Carmina xiula. I si la Carmina no xiula, l'Albert canta. Però si l'Albert canta, no sabem si la Carmina xiula o no xiula; i si la Carmina xiula, no sabem si l'Albert canta o no canta.

Quin embolic tot plegat, oi?. Però quin servei ens farà tot plegat quan als alumnes, arribats al Batxillerat, hagin d'entendre que una funció derivable és contínua, però que una funció contínua pot o no pot ser derivable.

5. Concentració mental.

Per acabar aquesta tanda de jocs, proposem un altre experiment de comunicació telepàtica, que el seu secret es basa també en el sistema binari.

Comencem construint una llista d'objectes que, tot i que això ha de passar desapercebut, tinguin o no tinguin algunes característiques en comú. Ara us explico aquest aparent contrasentit. Escollim, com a exemple, la característica "rodó" (rodó = 0, rectangular = 1) i la característica "petit" (petit = 0, gran = 1). Si es prefereix es poden triar característiques més precises, a gust del qui prepara el joc. És important que la llista la formem amb objectes familiars, que siguin fàcils d'imaginar. A títol d'exemple, podem plantejar la llista següent de 16 objectes:

número d'objecte	1a. tanda	2a. tanda	caracterist. rodó	caracterist. petit	objecte
0	0	0	0	0	taula
1	0	0	0	1	segell
2	0	0	1	0	pilota
3	0	0	1	1	medalla
4	0	1	0	0	televisor
5	0	1	0	1	tarja crèdit
6	0	1	1	0	paella
7	0	1	1	1	pesseta
8	1	0	0	0	finestra
9	1	0	0	1	foto carnet
10	1	0	1	0	sínia
11	1	0	1	1	anell
12	1	1	0	0	porta
13	1	1	0	1	cartera
14	1	1	1	0	volant
15	1	1	1	1	lentilla

Construïda la llista a casa nostra, podem començar a fer l'experiment amb un amic.

Comencem dient al nostre amic que li nomenarem una sèrie d'objectes. En principi no l'hi direm quants, i mentre els anem llegint, ho farem a intervals de temps més o menys iguals i els llegirem amb una veu greu com d'hipnotitzador, creant una atmosfera misteriosa.

Prèviament donem instruccions al nostre amic que, quan ell vulgui, pensi un dels objectes que anomenem i que, sense dir res, el visualitzi mentalment amb tot el seu poder mental per poder transmetre'l. Si cal, que tanqui els ulls amb l'excusa de concentrar-se bé.

Quan arribem a la meitat de la llista (o sigui que hàgim llegit fins al 7), parem i preguntem si ha pensat algun objecte. Si respon que sí, diem que llegim més objectes per si desitja canviar. Si respon que no, lògicament continuem llegint i ja sabem que pensarà en algun dels objectes que comencen per 1. Quan hem acabat de llegir la llista li preguntem – en cas que ja hagués pensat en algun objecte al principi – si encara està pensant en l'objecte original. Si ens diu que sí, ja sabem que està pensant en un dels objectes que comencen per 0.

Ara anunciem que tornarem a llegir la llista d'objectes, i que quan senti anomenar el seu, s'oblidi de tot i es concentri només en l'objecte pensat. I el que fem tot seguit és llegir pausadament els objectes que tenen un 0 a la segona columna, és a dir, els objectes corresponents als números 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10 i 11. Aleshores preguntem: *Estàs pensant en el teu objecte?*. Si ens diu que sí ja tenim reduït a 4 els possibles objectes, perquè ja sabem si el seu objecte comença per 0 o per 1, i ara també sabem que el segon número és un 0. Si diu que encara no, continuem llegint els objectes que tenen un 1 a la segona columna, i, com que ja coneixem el dígit de la primera columna, igualment reduïm a 4 el número d'objectes possible.

Ara, entre els quatre possibles, hem d'aplicar la psicologia per esbrinar els dos últims dígits de l'objecte: 00 *(rectangular i gran)*, 01 *(rectangular i petit)*, 10 *(rodó i gran)*, 11 *(rodó i petit)*.

Procedirem més o menys com segueix:
Demanarem al nostre amic que es concentri i direm: *veig un objecte petit*. Si està convençut continuarem: *tant petit que t'el pots endreçar a la butxaca*. En canvi si no està gaire convençut direm: *bé, més petit que una casa sí que ho és, oi?*. D'aquesta manera ja sabem si l'últim dígit és un 1 (petit) o un 0 (no tant petit, és a dir el que nosaltres hem considerat gran).

Ja només hem d'encertar entre 2. Continuem l'experiment dient que veiem un objecte rectangular. Si ens diu que sí, ja el tenim. Si fa que no arrufant el nas o una altra part visible del seu cos, diem que de fet nosaltres estem veient com una finestra i darrera la finestra veiem el seu objecte que esmentarem amb convicció. Llavors ens excusem dient que imperceptiblement també havia pensat una mica amb la finestra i això ha pogut interferir mínimament en les ones telepàtiques.

6. Conclusió.

El sistema binari de numeració té molta màgia. Hi ha diversos jocs d'enginy i jocs de mans amb cartes que es basen en el sistema binari. Els alumnes, i també nosaltres, ens hi podem divertir, tot fent aprendre algunes coses noves de matemàtiques. Si la proposta us sedueix, contesteu-me amb un 1. Si no us ha agradat, poseu-me un 0.