13. ACTIVITATS AMB ELS REGLETS NUMÈRICS

Mª.A. Canals. Facultat de Ciències de l'Educació de la UdG

Presentació

Els reglets numèrics són uns reglets de fusta de colors que representen els 10 primers nombres naturals, els seus quadrats i els seus cubs. Les seves magnituds són una expressió realista de les quantitats, amb la característica que no estan marcades les unitats que les formen.

- Els nombres es representen per reglets de 1cm^2 de secció, la seva longitud equival en centímetres al nombre que representa i són dels colors següents:
  l'1 (un dau d'1 cm d'aresta) és de color de fusta natural;
  als 2, 4 i 8 (família del 2) els correspon la gamma rosa, vermell i granat;
  als números 3 i 9, els correspon el color blau clar i blau fosc;
  el 6 (família del 2 i del 3) és de color lila (barreja del rosa i el blau clar);
  el 5 és verd; el 7 és groc i el 10 és de color marró, barreja de rosa i verd (ja que 10 és 2 X 5).
- Els quadrats són plaques quadrades, de 1 cm de gruix, cada una de color i longitud del costat del número corresponent.
- Els cubs són cubs que també tenen la seva aresta en cm. i el seu color corresponents als números de l'1 al 10.

Objectius

Els reglets numèrics, a més a més d'una gran eficàcia per a la comprensió de conceptes potencien les habilitats característiques del saber matemàtic. D'aquesta manera afavoreixen l'adquisició progressiva de la competència numèrica.

Els seus objectius principals són els següents:

- Ajudar els nois i noies a familiaritzar-se amb els nombres naturals, a conèixer-los en profunditat i a estimar-los.
- Experimentar i descobrir relacions entre els nombres, els seus quadrats i els cubs.
- Visualitzar les operacions i afavorir la seva pràctica.
- Fer estimació de resultats i discutir diferents solucions.
- Fonamentar el raonament a partir de la manipulació
- Afavorir la imaginació dels nombres i la seva expressió verbal
- Adquirir agilitat en el càlcul mental.
- Facilitar el pas al llenguatge matemàtic escrit, aprenent el significat real dels signes
- Investigar qüestions numèriques, que són com els "misteris " dels nombres.
- Descobrir propietats de les operacions i estratègies numèriques.
- Treballar la superfície i el volum.

Habilitats

A més a més de la seva eficàcia per a la comprensió de conceptes, precisament l'aspecte més característic dels reglets numèrics és el fet que potencien moltes habilitats o continguts procedimentals característiques del saber matemàtic entre les quals podem destacar les següents:

- **Observació de les relacions lògiques i numèriques** a partir de les experiències concretes, ja que en les edats de primària "són les accions sobre els objectes les que desencadenen el pensament" (disseny c. b. de Catalunya)

- **Expressió verbal** de les accions realitzades i de les relacions trobades, la qual ajuda a "concretar el pensament".

- **Plantejament d'interrogants** i utilització de mètodes heurístics per resoldre'ls, provocant una resposta eficaç dels alumnes.

- **Anàlisi de la informació rebuda** per a poder actuar en conseqüència i per a donar nous passos.

- **Estimació**, o sigui anticipació de resultats, la qual practicada sovint, quan els alumnes ja s'han familiaritzat amb una activitat, afavoreix la interiorització de la mateixa.

- **Investigació i descoberta** de propietats numèriques. Aquesta és probablement l'habilitat clau del saber matemàtic, que de forma progressiva han de conrear els alumnes des de les edats del pensament concret.

- **Recerca d'estratègies,** aplicables directament al **càlcul mental**

- **Pas de l'acció al càlcul escrit**, amb la correcta aplicació d'un llenguatge matemàtic del qual se'n coneix el significat real.

Totes aquestes habilitats poden aparèixer a cada una de les activitats i s'han d'anar treballant al llarg de tota l'etapa de primària. Amb això, no volem dir que sigui convenient insistir en totes cada cop que es facin servir els reglets, sinó que les podem anar alternant, en funció de les possibilitats dels alumnes, i sobre tot aprofitant cada situació i seguint la iniciativa del mestre.

Alguns exemples d'activitats

(La numeració és la dels documents repartits en aquestes jornades. Sempre podeu demanar-los a: CENMAR .- Facultat de Ciències de l'Educació. Udg.)

Exemple 4. Descomposició factorial de nombres

30. Descompondre un número donat en producte de dos factors, de diverses maneres possibles.	Ampliació del coneixement dels nombres que es descomponen.

1ª part

El mestre proposa als nens i nenes:

A cada parella us dic un número, i vosaltres heu de trobar tants productes diferents com pugueu que valguin aquest número.
A vosaltres us dic el 30, a vosaltres el 18..................

Els productes que han trobat en el cas del 30 són, per exemple, aquests:

(10 X 3   3 X 10   6 X 5   i   5 X 6)

Ens els ensenyen i els anomenen tots bé; “ *tres per deu*”.....etc.

El nostre paper és demanar que es fixin bé si en falten. Normalment es descuiden els següents: 30 X 1 i 1 X 30, ja que són massa evidents. De tota manera és important que els afegeixin als que ja tenen, i que sàpiguen que sempre els hauran de posar.

(representació de 1 X 30 i de 30 X 1)

Sovint també es descuiden els productes 15 X 2 i 2 X 15)
Probablement si no pensen en aquests és perquè es tracta de números fins als quals no arriba la taula de multiplicar. Es molt important que s’exigeixin ja que hem demanat **tots els productes possibles.**

Ara que ja els tenim tots, proposarem que els comparin entre ells i trobin els que són iguals, en el sentit de tenir la mateixa forma.
Quan en tenen dos d'iguals, o abans, per ajudar-se a veure si coincideixen, els situen l'un sobre l'altre. Es una afirmació d'aquella propietat de la multiplicació que ja hem après.
Se'ls pot convidat a que expliquin per escrit (com una carta a un amic) això que passa.
Hi ha nens que diuen *"això passa sempre amb tots els productes".*
Es una bona afirmació, amb un esperit de generalitzar una propietat, però no és completament certa, i justament això ens servirà de punt de partida per a la

2ª part

Repetim exactament el mateix partint d'altres nombres, entre els que n' hi hagi, alguns com ara aquests:

6 25 4 36 49

i si els alumnes saben ja la taula fins al 10 i són de 4t. curs podem posar-hi el 64, el 81... i fins al 144.

Prenem per exemple el 36. Segurament obtindrem d'entrada els productes

1 X 36 36 X 1 6 X 6 9 X 4 i 4 X 9

Maldant una mica obtindrem 2 X 18 18 X 2 3 X 12 i 12 X 3

Arribat el moment d'aparellar els que tenen la mateixa forma, ho faran bé, i els quedarà el 6 X 6 que no pot anar amb cap altre.

En aquest moment es reafirma allò que ja vam descobrir en construir la taula de multiplicar i és una ocasió per tornar a parlar dels productes de dos factors iguals, que....

.......*Són especials i .tenen un nom especial.... Us en recordeu?*

D'ara en endavant quan vulguem representar un producte d'aquests, és a dir un quadrat amb els reglets, ja no agafarem mai tots els reglets del mateix número (per exemple els sis reglets lila) sinó que ja agafarem directament el quadrat (per exemple el quadrat del 6, o quadrat lila).

A partir d'aquí caldrà complir-ho!

Cal fer constar, que tot i aquest final bonic. La cosa més important d'aquesta activitat és la riquesa de càlcul que significa el saber descompondre un número en dos factors de moltes maneres possibles.
Més tard (activitat) s'ampliarà amb altres descomposicions.
Les descomposicions de números en sumes són relativament fàcils i sovint les proposem a la classe. Però no podem oblidar les descomposicions en factors si volem arribar a l'objectiu de **conèixer molts aspectes d'un mateix nombre.**

Exemple 5. Dues maneres de multiplicar un nombre per una suma

37. Multiplicar un número per una suma, fent-ho de dues maneres: primer fer la suma i després multiplicar, o sumar després de fer els dos productes. Comparar els resultats.	Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma.

Suposem que es tracta de multiplicar el nombre 5 per la suma de 3 + 7

El resultat de realitzar la primera de les maneres proposades serà:

Primer fem la suma 3 + 7 = 10 Després multipliquem 10 X 5

El resultat de realitzar-ho de la segona manera serà:

Fem 3 X 5 I a part, 7 x 5 Després sumem, o sigui unim, els dos resultats

Es tracta simplement de comprovar si els dos resultats són iguals o diferents.

Exemple 7. Multiplicar per 10, per 20, per 30....... i per tot!

52. Fer un número (unitats i desenes) 10 o 100 vegades més gran, només canviant les unitats d'un ordre per altres de l'ordre següent, o de dos ordres més enllà. **53.** Multiplicar un número (amb unitats i desenes) per 20, 30, etc.., multiplicant-lo per 2,3...etc.. i després per 10.	Consolidació del valor posicional de les xifres, del sistema decimal i de la noció de multiplicació. Aplicació de la propietat associativa per a preparar la pràctica de multiplicacions escrites, amb números de dues xifres.

<u>1ª part</u>

<u>El mestre proposa als alumnes:</u>

*Agafeu el material un número, per exemple **el 32***

Si a continuació de les tres desenes agafen el reglet del 2 (és a dir el rosa), els suggerirem que el canviïn per dues unitats. Així doncs, tenim 3 desenes i 2 unitats.
*Ara volem multiplicar-lo per 10, és a dir **fer-lo deu vegades més gran**, però d'una manera molt senzilla, sense haver d'agafar tantes desenes.*
Podem pensar en fer deu vegades més gran cada una de les parts que formen el número, és a dir, cada una de les desenes, i cada una de les unitats.

Es tractarà de descobrir que justament, degut a " allò que ja sabem" (que els diferents ordres d'unitats creixen de deu en deu),
- quan una desena la fem deu vegades més gran es converteix en una centena
- quan una unitat la fem deu vegades més gran es converteix en una desena.

Per això, obtenim directament el nostre resultat. Podem expressar-ho així amb el material:

Les 3 desenes les substituïm per 3 centenes , i les 2 unitats les substituïm per 2 desenes.   3 2 X 1 0 = 3 2 0

Després treballarem amb altres exemples semblants.
Ës important que els alumnes arribin a la conclusió :

Per multiplicar un nombre per 10 només cal afegir-li un zero.

I si ara volguéssim fer el 32 ***cent vegades més gran****?.*

Si han entès bé la primera part, ells mateixos trobaran la solució de canviar les unitats per centenes i les desenes per milers, i deduiran la norma pràctica.

<u>2ª part</u>

Anteriorment ja hem practicat que a vegades per dividir per un nombre podem fer-ho amb dues divisions seguides. Per exemple, és igual dividir directament per 15, que dividir per 5 i per 3. Si això no hagués estat assumit, caldria treballar-ho abans de l'activitat actual.
Els nens i nenes saben també que aquest sistema sovint resulta més còmode, sobretot quan fem càlcul mental. Ara ho aplicarem al càlcul escrit.

Fem amb el material una multiplicació tant senzilla com 6 X 10 i obtenim el 60

Ara penseu com podríem fer molt fàcilment ***6 X 20.***
Intenteu fer-la en dues parts.

A continuació, com que tenim massa desenes, en canviarem deu per una centena.

És molt important que els nens i nenes arribin a expressar verbalment allò que han fet, pas per pas i que arribin a formular la conclusió que en podem treure:

Per multiplicar un número per 20 és més fàcil multiplicar-lo primer per 2 i després per 10. El mateix passaria per multiplicar un número per 30, o per....90.

Després podran passar a aquesta primera expressió escrita: 6 X 20 = 6 X 2 X 10
i a continuació 6 X 20 = 120.
Es pot completar amb exercicis de càlcul mental d'aplicació directa d'això mateix.

Aquest treball és important abans de presentar l'algorisme de la multiplicació escrita. En efecte, convé fer aquests passos a poc a poc i amb tota la comprensió que proporciona el material, ja que per als alumnes són imprescindibles per a comprendre bé allò que estan fent per escrit, i sense aquesta comprensió l'algorisme seria buit de significat.

Exemple 8. Les divisions escrites

63. Representar amb el material algunes divisions de nombres més grans que 100 per nombres més petits, construint un rectangle que tingui un costat de la mida del divisor. Constatar que el quocient és el mateix que si ho féssim repartint. **64.** En l'activitat anterior, reconèixer el residu, si és el cas, i buscar-lo de dues maneres: la quantitat que sobra, o la que faltaria per a que el quocient sigui una unitat més gran.	Significat real de la divisió com a operació inversa de la multiplicació. Reconeixement de la divisió entera. i la seva propietat fonamental. Quocient per defecte i per excés i les seves propietats. Condició que ha de complir el residu.

Els alumnes ja han treballat en cursos anteriors, les dues maneres de fer divisions: repartint, o construint un rectangle del que es coneix un costat.
Ara hi tornem amb nombres més grans i posem l'accent en el alguns avantatges de la darrera forma citada.

<u>El mestre proposa:</u>

Es tracta de veure com podríem fer 7 4 2 : 3 4.

Agafeu els reglets que corresponen al nombre 742.

Realment fer 34 piles d'unitats resultaria força incòmode, per tant proveu de fer-ho amb un rectangle.

<u>1ª part</u>

Al començament aquesta activitat serà força guiada pel mestre. Primer posarem el "divisor", que és 34, fet amb 3 desenes i 4 unitats, en una columna al costat, només per a servir-nos de guia, ja que ens diu la llargària d'un costat del nostre rectangle.
Ara es tracta d'anar posant totes les peces que formen 742 en columnes com la que ens fa de guia.
Començarem per situar-hi les 7 centenes; ens quedaran 3 grups de dues i en sobra una. Aquesta que ens sobra hem de canviar-la per 10 desenes, i amb això, de desenes en tindrem 14 (10 de la centena que hem canviat i 4 que ja en tenia en número) a punt de posar-les en columnes verticals. Convé que els alumnes facin pràctica d'explicar-ho.
Probablement nosaltres hem de tornar a intervenir.

Abans de continuar hem d'omplir l'espai que tenim al costat del 4. En posar-hi desenes (horitzontals) veiem que en necessitem 4 a sota de cada centena, o sigui en total 8. Ara doncs de desenes ens en queden 6.

Per repartir aquestes 6 desenes en columnes de 3 desenes, sembla que podrem fer dues columnes.

Ho provem, però llavors descobrim que per a completar el rectangle que ens ha quedat a la cantonada inferior, necessitem exactament 8 unitats i en el nostre número només en tenim dues d'unitats.
Davant d'aquest entrebanc hem de callar i deixar que els nens i nenes busquin solucions. Nosaltres només ens hem de fer forts en la idea que si el rectangle no està ben complet, no és una autèntica divisió.
Probablement hi haurà qui es decidirà per suprimir la segona columna de desenes, i llavors ens queden en mà 32 unitats.
El rectangle de la cantonada s'ha reduït a 4 unitats. Les hi posem (naturalment després de canviar una desena, cosa que sempre hem d'estar a punt de fer).
Ara tenim un rectangle complet! I a la mà tenim 32 – 4 = 28 unitats.
També és possible, i desitjable, que algú potser més agosarat digui que per poques unitats que ens faltaven per completar la nostra primera formació (ens en faltaven total 6!) podríem demanar un préstec de 6. Ho fem així i ens queda un rectangle una mica més gran, i un deute de 6 unitats. També és vàlid.

Arribats aquí, és el moment d'observar la nostra figura i treure'n conclusions, el moment en que nosaltres hem de potenciar el diàleg.

- ***Mireu bé allò que hem fet amb els reglets i procureu respondre amb precisió***

- *Fixeu-vos que en començar teníem la divisió 742 : 3*
- *On és el dividend ?. On el veiem?....*Resposta: .....*".És tota la quantitat".*
  (cal fer atenció a que no oblidin incloure-hi el residu)
- *Senyaleu la longitud que representa* ***el divisor****...*Resposta: "*és el 34 que tenim aquí"*
- *De quantes maneres hem pogut fer la divisió?.....*Resposta ....: *de dues maneres*
- *Ara senyaleu* ***el quocient,*** *és a dir el resultat que hem trobat en cada una d'aquestes maneres o opcions. Llegiu-lo . Quant val?*

Això ja costa més! *....* Passant-hi el dit hem d'interpretar la longitud de l'altre costat del rectangle que hem construït. Alguns no ho veuen i els hem d'ajudar.

Per fi alguns diuen 22 i altres 21. I tots tenen raó. Llavors podem parlar del residu i

Fer veure la seva importància.

- *No estaria ben dit dir que el quocient de dividir 742 per 34 és 21 i prou, ni 22 i prou.*

Caldrà dir que el quocient o resultat de la nostra divisió és 21 i en sobren 28, o bé que és 22 i en falten 6. Totes dues coses són veritat.

Així doncs hem arribat a un fet important: Una divisió que no és exacta, ens pot donar dos quocients diferents:

Un, quan sobren unitats, **que es diu quocient per defecte.**

Un altre, quan falten unitat, **que es diu quocient per excés**

<u>2ª part</u>

A partir d'aquest moment comença una 2ª part de l'activitat (que si cal pot realitzar-se l'endemà) , que és com una petita investigació per tal que els alumnes arribin a descobrir coses, i que nosaltres anirem completant amb el vocabulari matemàtic que correspon a cada una de les nocions.

Fem, per a nosaltres, una petita llista de coses a descobrir:

- Si agafem la primera opció, (quocient per defecte) veiem que el residu és molt gran, és més gran que el quocient ...(Alguns nens pensaven que no podia ser)
- El que sí és segur és que **sempre el residu és més petit que el divisor.**
- I si agafem l'altra (quocient per excés) **també és més petit que el divisor.**
- *Ara sumeu els dos residus (o sigui el 6 i el 28) i observeu què passa.* Poden fer-ho amb altres divisions inventades per ells, per exemple amb calculadora, i constatar-ho.
- **Sempre la suma dels dos residus és igual al divisor!**

Aquestes divisions amb números naturals, que no donen un resultat exacte es diuen **divisions enteres.**

3ª part

87. Repetir l'experiència de l'activitat 63 detallant els diversos passos de la resolució d'una divisió i, a mesura que ho fem, anar escrivint en un paper els resultats parcials obtinguts.	Raonament lògic aplicat a la resolució de la divisió i descoberta personal de l'algorisme d'aquesta operació.

Escriptura numèrica de tots els passos realitzats en fer la divisió amb els reglets.

Els alumnes poden anar omplint fàcilment aquests quadres si tenen davant el material i no fan res més que anar anotant allò que acabem de fer i de comentar verbalment.

Repartim les **centenes** entre les 3 desenes	Les que sobren les passem a desenes	Desenes que tenim en total	Per acabar el rectangle n'hem de gastar........
7 : 3 = 2 d'una desena de llarg, val.............................**20** i sobra 1 centena	1 cent. = 10 des.	10 + 4 = 14	2 X 4 = 8 8 files de desenes 1 4 – 8 = 6 Ens queden **6 desenes**
Repartim les **desenes**	Les que sobren les passem a unitats	Unitats que tenim en total	Per acabar el rectangle n'hem de gastar........
6 : 3 = ...**1** i sobren...3 desenes	2 des. = 30 unitats	30 + 2 = 32	Una fila de 4 32 – 4 = 28 Ens queden **28 unitats**

Per saber el quocient hem de sumar els dos quocients parcials : 20 + 1 = **21**

El residu és el nombre d'unitats que ens han quedat al final, és a dir **28.**

L'algorisme de la divisió escrita no és res més que una manera reduïda i pràctica d'escriure tot això.

Exemple 9. Comparar quadrats i comparar cubs.

68. Comparar el quadrat d'un nombre amb el d'un altre nombre que sigui doble, triple...d'aquell. Predir quantes vegades el quadrat petit cabrà en el gran., i després comprovar-ho.	Comprensió del fet que la raó entre els quadrats de dos nombres és precisament el quadrat de la raó entre els dos nombres.
73. Comparar el cub d'un nombres amb el d'un altre nombre que sigui doble, triple...d'aquell. Predir quantes vegades el cub petit cabrà en el gran., i després comprovar-ho.	Descoberta que la relació entre els cubs de dos nombres, no coincideix amb la relació entre els nombres ni amb la relació entre els seus quadrats.

Aquesta és una de les activitats que causa major sorpresa als nens i nens les primeres vegades de fer-la. Probablement això és degut a que, respecte de les relacions existents entre els nombres i els seus quadrats, gairebé tothom tenim un prejudici fals.

Precisament en els temes en què passa això és quan és més interessant que els alumnes ho treballin amb el material i vegin amb els seus propis ulls que allò que passa contradiu allò que ells mateixos prèviament pensaven.

1ª part.

El mestre proposa:

Agafeu amb reglets dos nombres, que siguin l'un ***doble*** *de l'altre.*

Uns agafen el 6 i el 3, uns altres el 10 i el 5, o el 8 i el 4, etc.... Si algú agafa el 12 (fet amb el 10 i el 2) i el 6, està molt bé.

Ja sabeu que el 3 en el 6 hi cap dues vegades, oi?

Doncs bé, sense fe res encara, digueu quantes vegades creieu que el quadrat del 3 hi cabrà en el quadrat del 6....

Deixem que surtin totes les opinions, i després diem:

Ara, comproveu-ho!

Normalment sempre n'hi ha que queden sorpresos del fet que el quadrat gran no sigui també el doble del quadrat petit.

Finalment cal que els nois i noies expressin correctament allò que han fet i que han vist, i que arribin a formular-ho ells mateixos així:

Si un número és doble d'un altre, el seu quadrat no és pas el doble de l'altre quadrat, sinó que és quatre vegades.

Ara agafeu dos nombres que siguin l'un ***triple*** *de l'altre, per exemple el 6 i el 2.*

Abans de fer-ho, penseu quantes vegades el quadrat del 2 hi cabrà en el quadrat del 6 i escriviu-ho en un paper. Després comproveu-ho.

Aquesta vegada hi ha moltes menys respostes encertades que abans

Es queden molt sorpresos veient que hi cap no 4 ni 6 vegades, sinó 9!

Cal repetir l'experiència amb altres parelles de números i també amb un número quàdruple, o quíntuple de l'altre....

Ës interessant el cas del 10 i el 2, en el qual el punt de partida és que el 10 és cinc vegades el 2, i trobem que en el quadrat del 10 de quadrats del 2 n'hi caben 25!

D'aquesta manera, arriba a ser normal el cas del 10 i el seu quadrat (que coincideix amb el dm.2) relacionat amb l'1 i el seu quadrat. Resulta doncs evident que el dm2 tingui no pas 10 cm2 com espontàniament esperàvem sinó 100 cm2.

----

89. Comparar els quadrats de dos nombres que l'un és múltiple de l'altre, i observar la relació que hi ha entre els dos quadrats, realitzant-ho amb el material, i expressant-ho verbalment i per escrit.	Descoberta que la relació entre els quadrats de dos nombres és precisament el quadrat de la relació entre els nombres.

En arribar a la E.S.O., quan per la seva edat els alumnes tenen ja un major grau de maduresa, convindrà repetir tota l'experiència, però arribant a la deducció i la formulació de la llei general:

La relació entre dos quadrats és precisament el quadrat de la relació entre els dos nombres.

2ª part

L'activitat es realitza exactament igual que amb els quadrats. L'única diferència és que ara la descoberta és encara més sorprenent. Els nois i noies constaten coses com per exemple aquesta:

" per fer el cub de 10 de cubs de 2 se'n necessiten moltíssims,
se'n necessiten 125 !"

Descobertes com aquesta són importantíssimes abans d'haver d'assumir (de grat o per força) que un dm3 equival a 1000 cm3,
Finalment, aquells que tinguin més desvetllada la capacitat de generalitzar conceptes, sobretot si es troben ja a la Secundària, potser arribaran a la formulació de la llei general en el cas dels cubs, és a dir, a l'expressió del fet que la relació entre els cubs de dos nombres és precisament igual al cub de la relació entre els nombres.

Encara que no arribin a formular-ho com nosaltres, veurem si ho han entès o no, proposant-los la resolució de qüestions numèriques com aquestes:
- El triple de 125 és 375. Sense calcular ni 125 al quadrat ni 375 al quadrat, podríeu dir-me quantes vegades el quadrat de 125 hi cap en el quadrat de 375?

Exemple 10. Com creixen els quadrats i com fem l'arrel quadrada

91. Buscar quins reglets cal afegir al quadrat d'un número perquè arribi a igualar el del número següent. Repetir-ho en diversos casos i trobar la norma. **92.** Donada una quantitat (primer menor que 100, i després més gran) posar-la amb el material en forma de	Major coneixement dels quadrats i del seu creixement. Descoberta d'una llei general, en un cas poc utilitari, pel plaer d'investigar. Noció d'arrel quadrada com a operació inversa de fer el quadrat. (sense passar a l'algorisme). Signe de l'arrel quadrada.

quadrat. Veure i anotar quin és el costat del quadrat i constatar el nombre d'unitats que sobren. Escriure una igualtat que expressi el què hem fet.	Nombre de xifres del nombre donat i del resultat. Valor màxim del residu, en relació amb l'activitat 91.

En l'activitat 67 ja havíem trobat l'ocasió d'observar que, d'una banda els nombres naturals, i d'altra banda els seus quadrats, tenen un creixement molt diferent. Però encara que no haguéssim fet aquella activitat, també podríem ara descobrir-ho de bell nou.

<u>1ª part</u>

<u>El mestre proposa:</u>:

Agafeu els quadrats de dos nombres seguits (per exemple el 2 i el 3) i busqueu quins reglets li falten al més petit per arribar a igualar el més gran.
Repetiu l'experiència amb uns altres dos quadrats de nombres seguits, que siguin força diferents dels anteriors.
Cadascú tindrà doncs davant seu dues configuracions que expressen el que hem dit:
A veure si ara sabeu explicar què passa.
Sovint és bo demanar-los que ho escriguin en un paper amb una o més frases. Allò que interessa és no que escriguin què passa amb el quadrat del 2 o amb el del 7, com fèiem als cicles mitjà o superior, sinó que a aquesta edat, el que interessa és que, després d'haver experimentat amb diversos casos concrets, arribin ja formular una conclusió o llei general. En aquest cas seria, per exemple:
" Al quadrat de qualsevol número, per arribar al quadrat del número següent, cal afegir-li dues vagades el número més una unitat "
(No cal dir que sempre hi ha diverses formulacions vàlides, mentre siguin correctes.)
Ara doncs, ho escriurem amb llenguatge matemàtic, per als primers números:

2* = 1*+ 2 X 1 + 1   3* = 2* + 2 X 2 + 1   4* = 3* + 2 X 3 + 1 ....

Podem fer una llista de les quantitats que hem d'anar afegint a cada quadrat per a obtenir el següent. Seran (inclòs el pas del 0* al 1*) : 1 , 3 , 5 , 7, 9 , 11, 13.....
És a dir la sèrie dels nombres senars.
Ara doncs, coneixem de forma molt més precisa la manera de creixer dels quadrats, que no és segons una quantitat fixa, sinó que és afegint cada vegada una quantitat més gran, i sempre un número senar.
Serà bo comprovar si aquesta curiosa propietat dels quadrats ha estat ben compresa, plantejant als alumnes alguna pregunta com ara aquesta:
Imagineu que tenim el quadrat del número 123. No podem fer-lo amb els reglets perquè no en tindríem prous ni tindríem prou lloc. Però com que ja sou grans, podeu pensar-ho encara que no els tingueu davant.
Si ara volguéssim passar del quadrat del 123 al de 124, què hauríem d'afegir-li?.
Amb coses d'aquest tipus s'intenta passar de la comprensió de casos concrets a la de propietats generals, o sigui s'intenta fomentar la capacitat de generalitza, pròpia d'aquestes edats i molt necessària per a passar a l'àlgebra o simplement a les primeres equacions. Aquestes primeres generalitzacions han de ser un progrés personal de cada alumne, i és evident que per a que pugui realitzar-se és gairebé indispensable la prèvia contemplació dels fenòmens numèrics en realitzacions fetes amb el material.

2ª part

Es tracta de donar als alumnes una quantitat per a que ells la posin en forma de quadrat.
Una possible forma de treball seria organitzar-los en petits grups i posar a la pissarra un quadre amb aquests nombres

70	59	81	42	33	92	29
108						

Cada grup ha de triar un nombre d'aquests i, agafant els reglets que cregui més convenient, posar el nombre en forma de quadrat. Ja sabeu que un mateix nombre podem fer-lo de moltes maneres diferents; doncs bé, abans d'agafar els reglets corresponents al nombre, penseu de quina manera us pot anar millor per tal que sigui més fàcil posar-lo en forma de quadrat.

L'opció que han de fer referent, referent a la manera de formar el nombre amb reglets, és la part més interessant per a la comprensió de l'arrel quadrada.
Per entendre això, analitzem diferents reaccions possibles suposant, per exemple, que es tractés del nombre 33.
Una possibilitat és que d'entrada agafin 3 desenes i 3 unitats, com fem altres vegades.
Hi ha nens que llavors pensen que per fer el quadrat els aniria millor tenir les 33 unitats soltes, i canvien les seves desenes. Per aquest camí arriben a fer diversos assajos de com col·locar-les, i a la fi descobreixen que, amb unitats soltes, per construir un quadrat s'ha de seguir aquest sistema d'actuació (les fletxes indiquen les etapes de la construcció), i llavors veuen ben clar que a vegades els sobren moltes unitats, però no tantes com per poder fer una altra fila.

(amb material)

Una altra possibilitat: agafen tres desenes i el reglet del 3, o sigui el blau, i en posar-los sobre la taula pensen que per fer un quadrat seria millor que tots fossin iguals. Llavors canvien les desenes per reglets del 3 i es troben que en total en disposen d'onze.
Algú comenta que seria millor si en lloc de ser reglets fossin quadrats, i això els decideix a canviar-los en aquest sentit.
Pensen que podran fer un quadrat posant-ne dos de blaus per banda, però tot seguit

constaten que no els arriba, (amb material)
Es senten alguns comentaris, com ara
Llàstima, per un reglet del 3, que no podem fer el quadrat de 6, Tant bé com aniria!
Llavors és moment important de reconèixer que han d'agafar com a punt de partida un sol quadrat blau; per tant, els altres els han de tornar a canviar en reglets, i anar-los posant al voltant seu, (de la mateixa manera que hem indicat abans amb les unitats). La construcció els obliga a canviar dos reglets per unitats, per tal de poder omplir el quadre de la cantonada.
Finalment, és possible que amb tot això, i sobretot a partir del fet que tots vagin explicant als altres allò que han fet, descobriran que el camí més fàcil és sens dubte agafar primer el quadrat més gran que hi cap dins del número, i després agafar la part que sobra amb unitats o amb reglets del mateix número, per posar-los als costats. I Sempre caldrà vigilar per tenir una unitat per omplir el quadre de la cantonada.
Tot això, aplicat al nostre cas del 33, donaria la manera d'actuar següent:
Pensar que en el 33 hi cap el quadrat de 5, perquè ja sabem que és 25 i en sobren 8.
Hem d'agafar, doncs, el quadrat verd de 5 i vuit unitats més.
Si amb aquestes intentem fer una altra fila, constatem que no podem.
Després de qualsevol de les tres construccions que hem aconseguit, demanarem als alumnes que escriguin en un paper l'operació que han fet.
Es el moment d'informar-los que aquesta es diu **arrel quadrada** i té un símbol per representar-la per escrit que és aquest //

Així doncs hem fet //33 = 5 residu 8

Després podríem proposar als alumnes la pràctica d'arrels quadrades senzilles resoltes mentalment. (No cal dir que això requereix que prèviament hagin memoritzat els quadrats dels primers nombres)

Aquesta activitat amb els reglets no té pas com a objectiu que els alumnes aprenguin l'algorisme de l'arrel quadrada, que normalment sempre resoldran amb calculadora, sinó que comprenguin en què consisteix, per tal que quan hagin de fer-la servir en diferents problemes de càlcul o de geometria, tingui per a ells algun significat.

Per acabar podem afegir-hi una reflexió interessant sobre el residu de l'arrel quadrada.

En l'exemple que acabem de fer, l'arrel ens ha sortit 5 i el resi8du, ens ha sortit 8.

A veure si algú de vosaltres, sap explicar co9m és que el residu pot ser més gran que el resultat de l'arrel.

Efectivament, això probablement és una cosa que sorprèn als que són observadors...

Per ajudar-los caldrà recordar una activitat feta anteriorment, la que nosaltres hem anomenat 1ª part. La conclusió és:

El residu de l'arrel quadrada ha de ser sempre més petit que dues vegades l'arrel més ú.

Exemple 11. El quadrat d'una suma.

95. Representar amb reglets una suma molt senzilla, i després construir el seu quadrat. A continuació intentar una altra cosa: fer el quadrat de cada sumand i després sumar-los. Després de fer una previsió, comprovar si el resultat és el mateix o no, i en aquest cas investigar per què o al menys explicar què passa.	Comportament del quadrat de la suma de dos números. Si interessa pot fer-se extensiu al cub de la suma de dos números.

Primer escriurem l'operació que volem fer**: (2 + 3) ***

organitzarem els alumnes en dos grups, i direm:

Vosaltres feu amb els reglets, primer la suma i després el quadrat del seu resultat.
Vosaltres feu el quadrat de cada un dels sumands, i després sumeu-los.
Creieu que tots dos grups obtindreu el mateix resultat final?.. ...
La majoria dels alumnes diuen que sí, probablement per analogia amb el cas de la multiplicació per una suma, que ja han treballat.
Després d'aquesta primera estimació del resultat, els demanem de comprovar-ho.
Les dues maneres proposades són:

Efectuar primer la suma I després fer el quadrat	Efectuar primer els dos quadrats i després sumar-los
2 + 3 = 5 5*	2* 3* 2* + 3 *

Els nois i noies veuen que el quadrat de 2 més el quadrat de 3 no arriben a omplir el quadrat de 5, per tant la primera cosa que constaten, i que serà bo que escriguin és aquesta:

2* + 3* =/ (NO IGUAL) 5 *

Això fins i tot ho veuen i comprenen a Cicle Mitjà, sense cap dificultat.
Ara que són més grans, podem intentar que trobin què és el que falta per a completar el quadrat de la suma, és a dir el quadrat de 5.
Falten precisament dos productes de 3 X 2 o bé de 2 X 3, o sigui que podem expressar-ho escrivint 2 X 3 X 2.
Ara cal escriure tot el que hem fet i trobat amb llenguatge matemàtic:

5* = 2* + 3* + 2 X 3 X 2 i finalment (2 + 3) * = 2* + 3 + + 2 X 3 X 2

Una sèrie d'altres casos concrets com aquest serà la preparació necessària per a la fórmula algebraica que estudiaran de més grans.

Exemple 12. Les equacions

99. Representar amb els reglets situacions numèriques i problemes amb dades desconegudes. Passar a la seva expressió escrita en forma d'equació i discutir-ne aquesta escriptura a la vista del material.	Comprensió del real significat d'una equació escrita, i dels valor representats per les lletres. Introducció al llenguatge de l'àlgebra.

<u>El mestre proposa als alumnes:</u>

Hem de trobar un reglet que repetint-lo tres vegades i sumant-li 4 ens doni 25.
No sabem quin és, però ja el trobarem. I no val a comptar-ho abans!
Representeu això amb els reglets, a sobre d'un paper, deixant un espai en blanc allà on hem de repetir tres vegades el reglet que no sabem quin és.
Ben aviat arribaran a la representació. Posarem punts suspensius a l'espai buit
Llavors, veient la longitud que correspon als tres reglets iguals (que en el nostre cas és 21) fàcilment endevinaran la solució.
La solució, recordem-ho, en aquesta activitat sinó un reglet
En aquest tipus d'activitat és indispensable exigir sempre la comprovació per a poder estar segurs que el resultat és bo.
Recordem que l'objectiu d'aquesta activitat no és pas trobar un valor numèric o resultat, sinó raonar per a trobar una manera correcta de plantejar una equació i comprendre el significat de la lletra x en fer-ho.
Ara ja hem trobat el reglet desconegut, i sabem que val 7. Vosaltres ja sabeu escriure tota l'operació que veiem amb els reglets, tal com feu sempre.
Però ara plantegem-nos una altre problema;
*Com ho podríem fer per escriure tota l'operació, **amb el signe "igual"** i tot, abans de saber quant val aquell reglet ?*
I deixem que ells inventin maneres. Segur que surt la de posar un dibuix o un signe en el lloc del reglet.
*Doncs, molt bé! Hem trobat el mateix truc que els matemàtics!. Ells han decidit que li posarem sempre una mateixa lletra que és la **X** i així, com que la gent de tot el món fem el mateix, només en veure-ho escrit ja ens entenem i sabem que vol dir que és una quantitat que hem de descobrir.*

Escrivim la nostra equació indicant-los que a partir d'ara, per no equivocar-nos amb la lletra X, farem servir un puntet com a signe de multiplicar.

$$\mathbf{3 \cdot X + 4 = 21}$$

Es molt important que la primera equació de la seva vida, no sigui una cosa que se'ls doni escrita per a resoldre, sense saber ben bé quin significat té aquesta escriptura, sinó que sigui una manera que ells mateixos han arribat a trobar d'escriure alguna cosa