

14. UN TOMB PELS RECURSOS DE PROBABILITAT I ESTADÍSTICA

Anton Aubanell Pou

I.E.S. “Sa Palomera” (Blanes) i Facultat de Matemàtiques U.B.

*Amor de vós io en sent més que no en sé,
de què la part pitjor me'n romandrà;
e de vós sap lo qui sens vós està.
A joc de daus vos acompararé.*

Ausies March

En aquest taller, ja ho diu el seu títol, us proposem un tomb, un passeig tal volta una mica displicent i sense cap aspiració de ser exhaustiu, entorn dels recursos que podem portar a l'aula de secundària per treballar la probabilitat i l'estadística.

Les tècniques de probabilitat i estadística en el fons són tècniques de *mesura*. Sovint associem la mesura exclusivament al món de la geometria, però de fet quan calculem probabilitats o fem estadística també mesurem magnituds. Certament magnituds immaterials, i per tant una mica més intangibles que les geomètriques, però no menys reals i sovint prou importants en el context social: estat de l'opinió pública sobre un tema concret, possibilitat que ens toqui en un joc d'atzar, incidència d'una determinada malaltia en cert segment de població, audiència d'un programa de televisió, etc.

Mai en el món s'havia produït i difós tanta informació com avui dia i mai com ara havia estat tan necessari pel ciutadà disposar d'eines que li permetin comprendre i analitzar amb objectivitat i autonomia el munt de dades que rep quotidianament a través dels mitjans de comunicació. És així que l'estadística i el tractament de l'atzar adquireixen una rellevància especial com a instruments per interpretar la informació que es rep, per produir informació pròpia i per elaborar prediccions referides a fenòmens en què intervenen moltes dades o que tenen un comportament aleatori.

Fa vint-i-cinc anys, per exemple, aquests blocs temàtics formaven part dels programes de Matemàtiques però, per un costat, semblaven situar-se en un segon terme d'importància enfront dels grans blocs de càlcul, àlgebra o geometria, i per l'altre, ja en el vessant metodològic, s'insistia especialment en els aspectes més teòrics –com si la pràctica *embrutés* les grans idees– i els exercicis es reduïen a càlculs numèrics directes bastant allunyats de la realitat. Avui això ha canviat molt: per un costat, l'estadística i la probabilitat estan considerades com a fonamentals en el bagatge matemàtic bàsic de què ha de disposar tot ciutadà i, per l'altre costat, aquests continguts es porten a l'aula d'una manera molt vinculada a l'entorn social i a la pràctica concreta. No és estrany doncs que, entre les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic que s'identifiquen en l'informe del Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu del Departament d'Ensenyament hi hagin les següents:

- Interpretar les estadístiques referides a la vida quotidiana.
- Conèixer les limitacions de l'atzar

Així mateix, en la nova distribució de continguts dins de l'ESO, les descripcions funcionals i estadístiques, per un costat, i l'atzar, per un altre, estan presents en tots els cursos.

Quan un mica més amunt ens referíem als canvis que s'havien produït en els darrers anys respecte del tractament de l'estadística i la probabilitat a secundària s'observava que no tan sols havia canviat la seva importància relativa dins dels programes de Matemàtiques sinó també, i això em sembla especialment important, la manera amb què aquests continguts es porten a l'aula i curiosament es descobreix que una metodologia més pràctica i real ofereix uns avantatges de fons que enriqueixen molt els propis continguts:

- Si treballem amb dades reals, les interpretacions que es facin dels resultats tindran més sentit.

- Si fem enquestes –encara que sigui dins del mateix institut– descobrirem que la preparació del qüestionari s'ha de fer amb molta cura, que no es pot aplicar de qualsevol manera i que el buidatge pot ser pesat especialment si no hi hem pensat des d'un bon principi.
- Si fem càlculs amb dades reals i grans descobrirem que pot ser convenient l'ús de mitjans tecnològics avançats com fulls de càlcul o paquets estadístics.
- Si ens veiem obligats a representar les dades a través de murals o mitjançant una exposició oral ens n'adonarem de la conveniència d'usar representacions tan fidels als resultats com visualment atractives.

Així doncs una metodologia més pràctica ens permet tractar un ventall de continguts més gran i més a fons. Això passa sovint: a vegades tendim a separar el que ensenyem de com ho ensenyem però realment són dos factors gens independents. Potser haurem d'admetre, també en l'ensenyament de les Matemàtiques, allò que Marshall McLuhan deia referint-se als mitjans de comunicació, *“El mitjà és el missatge”*.

A continuació presentem, sense cap pretensió de cobrir totes les possibilitats, diversos recursos de caire pràctic per treballar els temes de probabilitat i estadística a secundària des de la idea fonamental que expressa el professor Carles Barceló: *“Abans d'introduir els conceptes teòrics de probabilitat i estadística és indispensable que l'alumne passi per una etapa de manipulació i experimentació”*. Tanmateix vull aclarir que aquests recursos no els he inventat jo i em declaro deutor de moltes persones que hi han treballat de ferm. Voldria citar especialment la feina que varen portar a terme un grup de professors, amics, de Girona traduint i adaptant un magnífic material didàctic procedent de la Universitat de Sheffield, *“L'estadística en el vostre món”*, del qual he tret alguns dels recursos que us mostraré.

- **Recompte d'agrupacions: Fitxetes de combinatòria.**

Material: Abundants fitxetes de cartró de 4 o 5 colors diferents. També poden usar-se peces encaixables tipus policubs.

Descripció de l'activitat: S'agrupen els alumnes de tres en tres i es dona a cada grup 4 pilonets de fitxes. Cada pilonet d'un color diferent. A continuació se'ls diu que "*formin tots els grups que puguin amb 3 fitxes diferents*". L'enunciat d'aquesta activitat és intencionadament ambigu per tal de provocar que l'alumne es plantegi la necessitat d'establir si importa o no l'ordre i si es poden repetir o no. Convé que el professor deixi una estona fins que tots els grups s'ho hagin plantejat. Després se'ls pot dir que, depenent de la resposta que donem a les dues preguntes, obtindrem diferents tipus d'agrupacions que rebran diferents noms (variacions, variacions amb repetició, permutacions, combinacions). Com a primer exercici els demanem que formin les agrupacions suposant que sí que importa l'ordre i que no es poden repetir. Els equips aniran treballant i arribarà un moment en què ja no trobaran més agrupacions (n'hi ha 24, però ells no ho saben!). Alguns grups en trobaran, per exemple, 27 i altres, 18. Convé que discuteixin entre ells quines agrupacions sobren als uns i quines falten als altres. Així arribaran als 24. Llavors el professor preguntarà "*Com sabeu que no n'hi ha més?*". Aquí es veuran obligats a establir i explicar uns criteris de construcció a partir dels quals la deducció de la fórmula de les variacions és immediata. Després farem el mateix per als altres tipus d'agrupacions.

Es tracta d'un recurs molt simple però que sol donar bons resultats.

- **Cal saber llegir gràfics estadístics!**

Material: Transparències de gràfics estadístics *tendenciosos* procedents dels mitjans de comunicació.

Descripció de l'activitat: Es mostren les transparències a tot el grup i es demana als alumnes que en facin una interpretació. Sovint la impressió que en treuen al primer cop d'ull està molt allunyada de la que després es va elaborant amb les intervencions de tots.

- **Segons els sindicats eren 10000 manifestants, segons el govern eren 500!**

Material: Transparència d'una notícia del diari que compara les xifres que, sobre una vaga, donen sindicats i govern. Fotocòpies d'una foto aèria rectangular que mostra una concentració de persones que podem imaginar com una manifestació.

Descripció de l'activitat: El professor mostra i comenta la transparència i després reparteix les fotos aèries per tal que els alumnes, treballant en parelles, facin una estimació de la quantitat de persones que apareixen a la fotografia. Davant de la impossibilitat de comptar tots els caps que es veuen descobrirem la necessitat de seleccionar una petita zona quadrada o rectangular, assenyalar-la clarament sobre la fotocòpia, comptar les persones que hi ha a la zona escollida i extrapolar el resultat a tota la fotografia a partir de la proporció entre les àrees respectives. Observarem que els resultats que obtenen els diferents equips d'alumnes són molt propers. És una bona activitat per introduir la idea de *mostreig*.

- **Urnes, poblacions i mostres.**

Material: Fulls amb una quadrícula en blanc formada per 50 quadradets.

Descripció de l'activitat: Es planteja als alumnes un hipotètic tema de debat on hi ha arguments a favor i en contra, per exemple, la construcció d'un aeroport a Blanes. Es reparteixen dos fulls quadriculats a cada alumne i es demana que els empleni amb SI o NO de manera variada. Cada alumne apunta quants vots de cada ha escrit i retalla la quadrícula per tal que les

paperetes se separin. Es posen tots els vots en una urna i es barregen bé. Després es prenen mostres petites (unes 150 paperetes) i es compta quants SI i quants NO apareixen en la mostra. Com que coneixem el total de vots emesos (100 per alumne), una regla de tres ens permetrà fer una estimació del nombre total de SI i del de NO. Retornem la mostra a la urna i repetim el mateix procés amb una mostra més gran (uns 400 vots). Obtindrem unes noves estimacions per al total. Mentre haurem estat fent això (la part de recomptes i estimacions pot fer-se en equips de 2 o 3 alumnes), un alumne haurà anat preguntant discretament als seus companys quants vots de cada tipus havien emès i els haurà sumat. Això, al final, ens permetrà comparar les nostres estimacions amb els resultats exactes i veure que, per a mostres més grans, les estimacions són més fiables. A vegades ens hi aproparem molt!

- **Quants cigrons hi ha en un paquet d'un quilogram de cigrons?**

Material: Un quilogram de cigrons, retoladors i una recipient per a barrejar-los bé.

Descripció de l'activitat: Es tracta de comptar quants cigrons hi ha. Prenem una primera mostra de cigrons, la comptem (suposem que n'hi ha m_1) i fem sobre cada cigró una marca ben visible amb el retolador. Retornem els cigrons al recipient i els barregem bé amb els altres. Tot seguit traiem una segona mostra i la comptem (suposem que n'hi ha m_2). A continuació comptem quants dels m_2 cigrons de la segona mostra porten el senyal del retolador, és a dir, formaven part de la primera mostra (suposem que en són n). Si anomenem t al total de cigrons que estem buscant sembla assenyat esperar que la proporció de cigrons marcats (n) que apareix en la segona mostra (m_2) sigui aproximadament la mateixa proporció de cigrons marcats (m_1) respecte del total de cigrons (t). Així

tindrem que $t \approx \frac{m_1 \cdot m_2}{n}$. Un cop feta aquesta estimació és interessant comptar, entre tots, quants cigrons hi ha realment i observar l'error comès.

Aquesta tècnica –que a vegades s'anomena de *captura i recaptura*– pot ser utilitzada en contextos ben diferents com per comptar les balenes del mar del nord o els peixos de l'estany de Banyoles.

▪ Jocs de probabilitat.

Material: Un taulell de joc que representa una pista d'atletisme amb dos corredors. La pista queda interrompuda per unes parelles de quadradets on podem posar-hi uns cartrons que representen successos concrets d'experiments aleatoris. També necessitarem ruletes diferents i/o daus.

Descripció de l'activitat: Es formen dos equips de tres alumnes i es dona a cada equip una fitxeta per moure. Davant de cada parella d'obstacles l'equip haurà de decidir per quin dels dos intentarà passar. Un cop feta l'elecció es farà l'experiment aleatori que descriu el cartronet corresponent. Si el succés es verifica el corredor passa l'obstacle i avança, en cas contrari roman al mateix nivell i pot decidir de nou per quin dels dos cartronets intentarà passar. Guanya l'equip que primer arribi a la meta.

És un joc per motivar la necessitat d'establir mesures de les “*possibilitats*” que té cada opció. D'entrada els cartronets plantegen alternatives fàcils de decidir però arriba un moment en què les coses es compliquen i es fa necessari cercar maneres de calcular quina elecció convé més. Anirem fent servir els termes “*possible*”, “*impossible*”, “*segur*” i “*probable*” i acabarem descobrint, per sentit comú, la *regla de Laplace* que defineix la probabilitat com a casos favorables dividit entre casos possibles. Aquesta descoberta a través de la intuïció està en la línia del que va escriure el mateix Pierre Simon de Laplace: “*la teoria de probabilitats, en el fons, no és més que el*

sentit comú reduït al càlcul". Tanmateix el seu contemporani Voltaire, li va fer observar que "*el sentit comú és el menys comú dels sentits*".

- **Tot apropant-nos a l'equilibri!**

Material: Una moneda i un paper mil·limetrat amb dos eixos cartesianes. A l'eix d'abscisses representarem el nombre de tirades amb divisions de 10 en 10 i al d'ordenades la freqüència relativa del nombre de cares obtingudes.

Descripció de l'activitat: Es formen equips de 2 o 3 alumnes. Un d'ells va tirant la moneda i un altre va comptabilitzant el nombre de cares que s'obté. Cada 10 tirades es calcula la freqüència relativa del nombre de cares obtingudes fins llavors i es representa en el diagrama cartesià. Observarem al principi moltes oscil·lacions en els resultats representats ("*ratxes de sort*") però després veurem que els punts van apropant-se a una recta horitzontal que, si la moneda està equilibrada, correspon al valor de la freqüència relativa 0.5. Aquesta estabilització respon a l'anomenada "*Llei empírica de l'atzar*" o "*Llei dels grans nombres*" que ens permetrà donar una definició experimental de probabilitat alternativa a la regla de Laplace. Bona part de les experiències que podem fer a classe consisteixen a comparar, per a un succés concret, el valor de la probabilitat que ens ofereix, a priori, la regla de Laplace amb el valor que obtenim experimentalment a través de la llei dels grans nombres.

- **Xinxetes, xinxetes i més xinxetes**

Material: Moltes xinxetes del mateix tipus i paper mil·limetrat amb dos eixos cartesianes com en la pràctica anterior.

Descripció de l'activitat: Es fa el mateix que en l'activitat precedent però tirant xinxetes en lloc de monedes. Cada grup disposa de 20 xinxetes que tiraran enlaire per tal que caiguin aleatòriament sobre la taula. Després comptaran quantes queden amb la punxa cap amunt i quantes queden

tombades. Com en la pràctica anterior, representarem en el gràfic l'evolució de les freqüències relatives del succés “*caure tombada*” i observarem que, quan el nombre de tirades va sent gran, les freqüències relatives s'apropen a un nombre que serà la probabilitat de “*caure tombada*” per al model concret de xinxeta amb què estem treballant.

- **Amb un dau i molta paciència.**

Material: Daus i fulls per a fer gràfics.

Descripció de l'activitat: Es formen equips d'alumnes i es dona a cada equip un dau que hauran de tirar moltes vegades, apuntant el resultat que surti a cada tirada. Un cop hagin fet 200 tirades calcularan les freqüències relatives de cadascun dels 6 resultats i les representaran en un diagrama cartesià. Faran el mateix després de 400 tirades i després de 1000 tirades i observaran que cada cop les freqüències relatives dels sis resultats possibles tendeixen a igualar-se. En els casos en què el nombre de tirades es fa gran pot ser aconsellable treballar conjuntament tota la classe tirant diferents daus (encara que això és fer una mica de trampa, perquè no tots els daus són idèntics) per tal d'acumular més tirades en poc temps. Al final serà interessant preguntar què passaria si utilitzéssim un dau trucat. Malgrat que es tracta d'una experiència molt i molt lenta, és útil per introduir la idea de *distribució uniforme*.

- **Ai la intuïció!.**

Material: Dos daus per a cada equip d'alumnes.

Descripció de l'activitat: Es formen equips de 2 alumnes i se'ls donen dos daus a cada parella. Se'ls explica que l'experiment aleatori consistirà a tirar els dos daus i sumar les puntuacions –la suma serà un nombre de 2 a 12– i se'ls demana per quin resultat apostarien? Hi ha opinions de tot tipus: pel 6, pel 2, pel 10, pel 12, pel 7,... Fem-ho moltes vegades! Els grups comencen

a tirar els daus i van apuntant el resultat de la suma de les puntuacions. Quan cada grup ha fet un bon nombre de tirades, acumulem les dades de tots els grups i calculem la freqüència relativa amb què ha aparegut cada resultat. Considerarem que el valor obtingut és una bona aproximació de la probabilitat i observarem que el 7 és el més probable i el 2 i el 12 els menys probables. Serà bonic comparar aquests resultats amb l'aposta inicial que cadascú havia fet.

És molt interessant, un cop fet això, calcular la probabilitat dels diferents resultats a través de la regla de Laplace veient el resultat que donen totes les parelles de possibles puntuacions dels dos daus. Si s'han fet moltes tirades observarem una semblança sorprenent entre les probabilitats obtingudes pels dos mètodes.

- **Probabilitats per un tub**

Material: Tubs de PVC per a canonades de desguàs , bifurcacions, colzes, rosques, bosses de plàstic, cinta adhesiva i moltes boletes petites.

Descripció de l'activitat: Es connecten els tubs de manera que hi hagi una sola entrada i es vagin bifurcant donant diverses sortides a cadascuna de les quals s'hi adhereix una bossa de plàstic. Una vegada construït el dispositiu ens preguntem, atenent al nombre de bifurcacions dels diferents camins, quina és la probabilitat *teòrica* que una bola arribi a cadascuna de les sortides i, fins i tot, podem escriure-la en un paper que enganxarem al final del tub. Després, mantenint vertical el conjunt, es tiren per dalt moltes boletes que baixen pels tubs i es distribueixen per les diverses bosses de plàstic. El nombre de boletes que arribaran a cada bossa dependrà de les probabilitats que havíem calculat anteriorment.

- **Recompte del nombre de camins. El triangle de Tartàglia. La màquina de Galton**

Material: Una foto aèria de l'Eixample de Barcelona sobre transparència, un plànol de Barcelona per a conèixer els noms dels carrers que ens interessin, una màquina de Galton i boletes.

Descripció de l'activitat: Es tracta d'una activitat una mica complexa però molt bonica. Podríem distingir-hi tres fases:

- Projectem la transparència i suposem que estem situats en una cruïlla concreta, per exemple Calàbria – Rosselló. Ens preguntem per quants camins diferents de longitud mínima podem arribar a la cuïlla València – Urgell. Per respondre a aquesta qüestió ens fem preguntes *parcials* més fàcils: Per quants camins de longitud mínima podem arribar a Rosselló – Viladomat o a Provença – Calàbria? Per quants camins de longitud mínima podem arribar a Mallorca – Urgell? En una nova transparència, superposada a l'anterior, escrivim, sobre cada cruïlla, el nombre de camins que hi arriben allunyant-nos progressivament del lloc de sortida tot avançant en la direcció València – Urgell.
- Si observem la transparència superposada girant-la un angle de 45° de manera que la cruïlla Calàbria – Rosselló quedi en el vèrtex superior, ens n'adonarem que apareix precisament el triangle de Tartàglia.
- Ara deixarem que siguin unes boletes les que es moguin per una xarxa molt especial de *carrers* tot experimentant amb l'anomenada *màquina de Galton* que, en la seva versió més rudimentària, pot fer-se amb un taulell de suro i agulles clavades en files paral·leles de tal manera que cada agulla estigui situada entre dues consecutives de la fila anterior i que el conjunt formi un triangle. Inclinant el taulell i deixant caure boletes pel vèrtex superior del triangle veurem que es reparteixen de manera proporcional als nombre de la fila corresponent del triangle de Tartàglia, és a dir, al nombre de camins que arriben a cada destinació final.

No voldria acabar sense citar, encara que sigui de passada, dos tipus de recursos que hem de tenir molt en compte a les nostres classes d'estadística i probabilitat però que surten de l'enfocament més experimental i manipulatiu dels recursos que hem presentat:

Les calculadores. Actualment quasi tots els alumnes disposen de calculadora científica i convé saber-ne treure el màxim profit. Un problema que es presenta a la pràctica és la diversitat de models que cal explicar per separat. Poden comentar-se els següents aspectes (entre parèntesis s'indica la tecla corresponent per alguns models de màquines): entrada al mode estadístic (SD), esborrat de dades estadístiques anteriors (SAC), entrada de valors (DATA), entrada de valors seguits de la freqüència (valor, tecla x, freqüència, DATA), obtenció del nombre de dades (n), suma de dades ($\sum x$), mitjana aritmètica (\bar{x}), suma de dades al quadrat ($\sum x^2$), desviació tipus (σ_n).

Els programes estadístics. A part de paquets estadístics i d'aplicacions sobre fulls de càlcul, podem trobar programes didàctics concrets a la web del PIE o al *Sinera 2000*. Alguns d'aquests programes són realment molt bonics i útils.

Tant de bo algun dia, en els centres d'ensenyament, existís un laboratori de Matemàtiques del qual poguessin formar part els materials que hem mostrat!